(1) l_n 上の点を (x_n, y_n), l_{n+1} 上の点を (x_{n+1}, y_{n+1}) とすると

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y_{n+1} \\ x_{n+1} + \frac{3}{2}y_{n+1} \end{pmatrix}$$

$a_n x_n + b_n y_n = 1$ に代入

$$a_n\left(-\frac{1}{2}y_{n+1}\right) + b_n\left(x_{n+1} + \frac{3}{2}y_{n+1}\right) = 1 \quad \therefore b_n x_{n+1} + \left(-\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n\right)y_{n+1} = 1$$

よって
$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \end{cases} \quad (n \geqq 0)$$

(2) (1)より $a_{n+2} = b_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n = -\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}a_{n+1}$

$$\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$$

$a_0 = 3$, $b_0 = 2$ と(1)より $a_1 = b_0 = 2$

よって　$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_1 - a_0) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore$ $n \geqq 1$ で　$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} -\left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$　[初項 -1，項数 n]

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n = 0 \text{でも成立})$$

$$b_n = a_{n+1} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \geqq 0)$$

よって l_n は

$$\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x + \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}y = 1$$

$$\therefore (x + y - 1) + \frac{1}{2^n}(2x + y) = 0$$

これは l_n が $x + y - 1 = 0$, $2x + y = 0$ の交点
$(-1, 2)$ を通ることを示している．よって l_n を表す式は

$$(1 + 2^{-n+1})(x + 1) + (1 + 2^{-n})(y - 2) = 0$$

$$y - 2 = -\frac{1 + 2^{-n+1}}{1 + 2^{-n}}(x + 1)$$

$$= -\frac{1 + 2^{-n} - 2^{-n} + 2^{-n+1}}{1 + 2^{-n}}(x + 1)$$

$$= -\left(1 + \frac{-2^{-n} + 2^{-n+1}}{1 + 2^{-n}}\right)(x + 1)$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{2^n + 1}\right)(x + 1)$$

l_n の傾きは　$n = 0$ のときの $-\frac{3}{2}$ から単調に増加し，$\lim_{n \to \infty} -\left(1 + \frac{1}{2^n + 1}\right) = -1$ を超えることはない．

よって l_n は $n\to\infty$ のときの直線

$y-2=-(x+1) \Leftrightarrow x+y=1$

と一致しないため，D_1，D_2 D_3 … の共通部分は $x+y=1$ を境界とし，かつ，

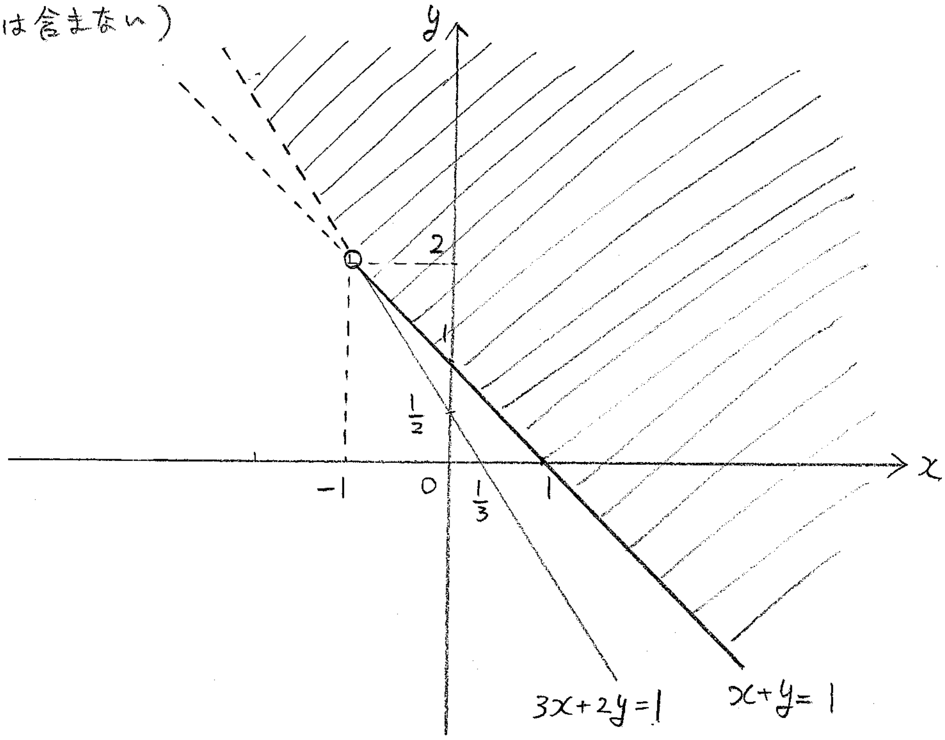
この境界を含む．　$\therefore x+y \geqq 1$ …①

また，D_0：$2x+3y>1$ …② でなければならず，①，②を満たす領域は

すべて条件を満たしている．

よって求める領域は下図斜線部で，実線の境界を含む（点線の境界と

白丸は含まない）



〈線形代数を重視した解答例〉

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \xmapsto{f^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ----①

$P(x, y)$ が ℓ_n 上を動くとき　$(a_n \ \ b_n)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ ----②

$f(P)\ (x', y')$ が ℓ_{n+1} を描く　$(a_{n+1} \ \ b_{n+1})\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$ ----③

①を②に代入すると、

$$\frac{1}{2}(a_n \ \ b_n)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

$$\left(b_n \ \ -\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \quad \text{----④}$$

④は③と同じ直線 ℓ_{n+1} を表すので

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \end{cases}$$

(2) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ なので、

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ とおけば　$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ----⑤

行列 A について　$A^2 - \frac{3}{2}A + \frac{1}{2}E = O$

$$(A-E)\left(A-\frac{1}{2}E\right) = O$$

$$A\left(A-\frac{1}{2}E\right) = E\left(A-\frac{1}{2}E\right) \longrightarrow A^n\left(A-\frac{1}{2}E\right) = A-\frac{1}{2}E$$

$$A(A-E) = \frac{1}{2}E(A-E) \longrightarrow A^n(A-E) = \left(\frac{1}{2}\right)^n(A-E)$$

辺ごとにひくと、　$\frac{1}{2}A^n = \left(A-\frac{1}{2}E\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^n(A-E)$

$$A^n = (2A-E) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(A-E)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

⑤より

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

以下略.

(1) 文科第2問の(2)と同じ。

(2) 6枚のカードの2色の枚数のパターンとしては、3枚ずつの2色、4枚と2枚の2色、5枚と1枚の2色、6枚が同色の4通りであり、これらを順に状態A，B，C，Dと呼ぶことにする。変化のパターンとしては、$A\to B$，$B\to A$，$B\to C$，$C\to B$ または $C\to D$ の5通りであって、順に確率は 1，$2/3$，$1/3$，$5/6$，$1/6$ である。1回目が $A\to B$ であり、

途中に；$B \xrightarrow{\frac{2}{3}} A \xrightarrow{1} B$，$B \xrightarrow{\frac{1}{3}} C \xrightarrow{\frac{5}{6}} B$；確率は $\dfrac{17}{18}$，を k 回

繰り返した後に、$B \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} C \xrightarrow[\frac{1}{6}]{} A$：確率は $\dfrac{1}{18}$ が

発生することなので、$1+2k+2=2k+3=n$

であって、状態Dになるのは3以上の奇数回目とわかる。よって、求める確率は、

$$
\begin{cases}
n=1\text{ のときと }n\text{ が偶数のときには }0\\
n\text{ が }3\text{ 以上の奇数のときには、}k=\dfrac{n-3}{2}\\
\text{なので、}\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{17}\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}
\end{cases}
$$

(1) 文科第2問(2)と同じ

(2) 操作(A)を n 回繰り返した後に

状態 P □□□■■■ となる確率 p_n 　$(p_0=1,\ p_1=0)$

Q □□□□■■ (or □□■■■■) 〃 q_n 　$(q_0=0,\ q_1=1)$

R □□□□□■ (or □■■■■■) 〃 r_n 　$(r_0=0,\ r_1=0)$

S □□□□□□ (or ■■■■■■) 〃 s_n 　$(s_0=0,\ s_1=0)$

状態の遷移は次のような確率でおこる。

$$P \underset{\frac{2}{3}}{\overset{1}{\rightleftarrows}} Q \underset{\frac{5}{6}}{\overset{\frac{1}{3}}{\rightleftarrows}} R \xrightarrow{\frac{1}{6}} S \circlearrowleft 1.$$

よって、次のような漸化式ができる。

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n & \cdots ① \\ q_{n+1} = p_n + \frac{5}{6}r_n & \cdots ② \\ r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n & \cdots ③ \\ s_{n+1} = \frac{1}{6}r_n + s_n & \cdots ④ \end{cases}$$

①〜③より

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= p_{n+1} + \frac{5}{6}r_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}q_n + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}q_n = \frac{17}{18}q_n \end{aligned}$$

$q_0=0$ より、n が偶数のとき $q_n=0$

$q_1=1$ より n が奇数のとき $q_n=\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

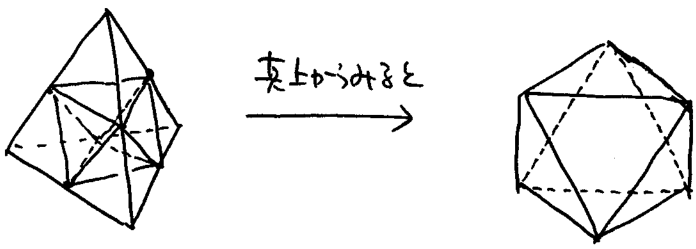
求める確率は④,③より $n \geqq 2$ において

$$s_n - s_{n-1} = \frac{1}{6}r_{n-1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}q_{n-2} = \frac{1}{18}q_{n-2} = \begin{cases} \frac{1}{9}\cdot 0 & (n:\text{偶数}) \\ \frac{1}{18}\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

また、$n=1$ のとき $\frac{1}{6}r_0=0$ であることと合わせ、

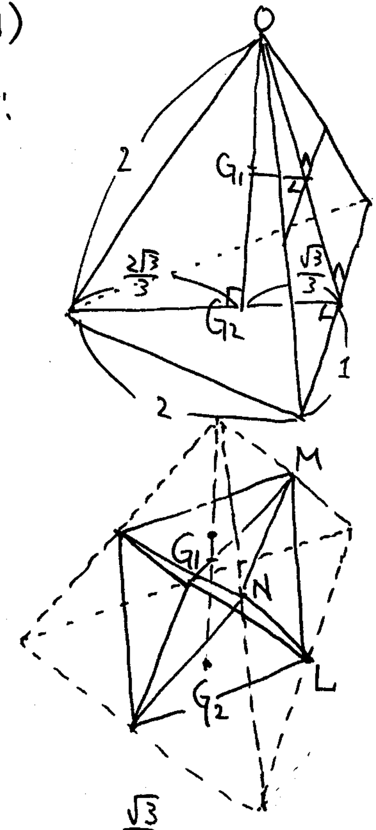
$$\begin{cases} n\text{が偶数または}1\text{；}\ \underline{0} \\ n\text{が}3\text{以上の奇数；}\ \underline{\frac{1}{17}\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \end{cases}$$

(1) 正四面体の各辺の中点を結ぶと，正八面体が得られる．



(平面図)

$$OG_2=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

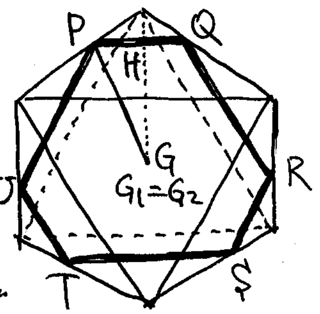


(2) まず，平行な二面間の距離 G_1G_2 を求める．

1辺の長さが2である正四面体の高さは $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ なので，

$G_1G_2=\frac{\sqrt{6}}{3}$

回転軸 G_1G_2 と垂直な面で正八面体を切断して得られる切り口は、図の太線部のような六角形となる．



断面の中心をGとすれば

$GP=GQ=\cdots=GT$ となるので，

回転体の断面となるのは，半径GPの円板である．

PQの中点をHとすれば，断面積は

$$\pi GP^2=\pi(GH^2+PH^2)\quad\cdots\cdots ①$$

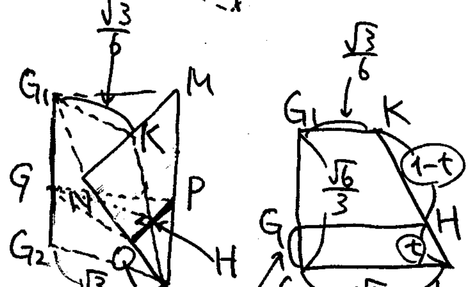
この値を，$G_2G=u=\frac{\sqrt{6}}{3}t\quad(0\leqq t\leqq 1)$

を用いて表す．図のように点 K, L, M, N, P, Q, H をとり，G_1G_2LK が台形であることに注意すると，

$$G_2G:GG_1=u:\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-u\right)=t:1-t$$

$$GH=(1-t)G_2L+tG_1K=\frac{\sqrt{3}}{3}(1-t)+\frac{\sqrt{3}}{6}t=\frac{\sqrt{3}}{6}(2-t)$$

$$PQ=tMN=t\times 1\ ,\quad PH=\frac{1}{2}t$$



①に代入すると，

$$\pi GP^2=\pi\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2(2-t)^2+\left(\frac{1}{2}t\right)^2\right\}=\frac{\pi}{3}(1-t+t^2).$$

求める体積は

$$\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\pi GP^2\,du=\frac{\pi}{3}\int_0^1(1-t+t^2)\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}dt=\frac{\sqrt{6}\pi}{9}\left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{5\sqrt{6}}{54}\pi$$

(1) $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ とおく。このとき,

$$k = \frac{p^2+q^2}{2} \iff p^2+q^2 = 2k \cdots\cdots ①$$

$$m = \frac{q^2-p^2}{q-p} = p+q \cdots\cdots ②$$ であり,

$$L^2 = (q-p)^2 + (q^2-p^2)^2 = (q-p)^2\{1+(p+q)^2\}$$

$$= (q-p)^2(1+m^2) \iff (q-p)^2 = \frac{L^2}{1+m^2}$$

ここで, $(p+q)^2 = p^2+q^2+2pq = 2k+2pq$ と

$(q-p)^2 = p^2+q^2-2pq = 2k-2pq$ との辺々差

をとることで, $(p+q)^2+(q-p)^2 = 4k$, すなわち,

$k = \frac{1}{4}\left(m^2+\frac{L^2}{1+m^2}\right)$ を得る。

(2) L を固定するので, k は m の関数であり, (1) の結果を $k(m)$ と書けば

$$k'(m) = \frac{1}{4}\left\{2m - \frac{2L^2m}{(1+m^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{m}{2}\left\{1-\frac{L^2}{(1+m^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{m}{2}\cdot\frac{(1+m^2+L)(1+m^2-L)}{(1+m^2)^2}$$

であり, $k'(m)$ の符号変化は $m\{m^2-(L-1)\}$ のそれ

に従う。よって，$0<L<1$ のとき $m^2-(L-1)>0$ なので，$f_L'(m)$ は $m=0$ でのみ符号変化し，そのときの変化が負から正なので，$f_L(m)$ は $m=0$ において極小かつ最小となる。すなわち，

$$\min.=f_L(0)=L^2/4 \quad \text{である。}$$

$L\geqq 1$ のとき，$f_L'(m)$ は $m=\pm\sqrt{L-1}$ の前後において，符号を負から正に変えるので，この２箇所で極小となる。$f_L(m)$ は m の偶関数なので，これらの極小値は等しく，$m=\pm\sqrt{L-1}$ で最小となる。すなわち，

$$\min.=f_L\left(\pm\sqrt{L-1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{(L-1)+\frac{L^2}{L}\right\}=\frac{2L-1}{4}$$

である。以上により，

$$\min.=\begin{cases} L^2/4 & \cdots\cdots\ 0<L<1 \text{ のとき} \\ \dfrac{2L-1}{4} & \cdots\cdots\ L\geqq 1 \text{ のとき.} \end{cases}$$

(1) $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ とおけば、$h = \dfrac{p^2+q^2}{2}$ ……① である。

$L^2 = PQ^2 = (q-p)^2 + (q^2-p^2)^2 = (q-p)^2\{1+(p+q)^2\}$

$\therefore L = |q-p|\sqrt{1+(p+q)^2}$

$m = \dfrac{q^2-p^2}{q-p} = p+q$

これらより p、q を消去して、h を L, m で表す。

$$|q-p| = \frac{L}{\sqrt{1+(p+q)^2}} = \frac{L}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$(q-p)^2 = \frac{L^2}{1+m^2}$$

$$(p+q)^2 = m^2$$

①より、$h = \dfrac{p^2+q^2}{2} = \dfrac{(q-p)^2+(p+q)^2}{4} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{L^2}{1+m^2}+m^2\right)$

(2) L を固定して、h の m による増減を調べる。

$$\frac{dh}{dm} = \frac{1}{4}\left(\frac{-2m\cdot L^2}{(1+m^2)^2}+2m\right) = \frac{m}{2}\cdot\frac{(1+m^2+L)(1+m^2-L)}{(1+m^2)^2}$$

(i) $1 \leqq L$ のとき

m	…	$-\sqrt{L-1}$	…	0	…	$\sqrt{L-1}$	…
$\frac{dh}{dm}$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
h	↘		↗		↘		↗

$m = \pm\sqrt{L-1}$ において h は最小値 $\dfrac{2L-1}{4}$ をとる。

(ii) $0 < L < 1$ のとき

m	…	0	…
$\frac{dh}{dm}$	$-$	0	$+$
h	↘		↗

$m = 0$ において h は最小値 $\dfrac{L^2}{4}$ をとる。

以上まとめて、求める最小値は

$$\begin{cases} 1 \leqq L \text{ のとき } \dfrac{2L-1}{4} \\ 0 < L < 1 \text{ のとき } \dfrac{L^2}{4} \end{cases}$$

註.

相加平均 ≧ 相乗平均の不等式を用いる場合.

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{1}{4}\left(\frac{L^2}{1+m^2}+m^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{L^2}{1+m^2}+1+m^2}{2}-\frac{1}{4} \\
&\geqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L^2}{1+m^2}\cdot(1+m^2)}-\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2}L-\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

等号成立条件は. $\dfrac{L^2}{1+m^2}=1+m^2 \iff L=1+m^2$ となるが.
$(L>0)$

ここで (i) $1 \leqq L$ のときは等号成立条件が実現し,

(ii) $0<L<1$ のときは等号成立が実現しない.

したがって、この方法では (ii) の場合をカヴァーできない.

(1) mに関する帰納法で示す.

$m=1$のとき $\boxed{3^1}=111=3\times 37$ は 3^1で割り切れるが 3^2では割り切れない.

あるmで $\boxed{3^m}$ が 3^mで割り切れるが 3^{m+1}では割り切れないと仮定する.

すなわち, $\boxed{3^m}=\overbrace{11\cdots111}^{3^m\text{個}}=3^m\times L$ （Lは3で割り切れない整数）

とおくと.

$$\boxed{3^{m+1}}=\boxed{3\cdot3^m}=\overbrace{11\cdots111}^{3^m\text{個}}\overbrace{11\cdots111}^{3^m\text{個}}\overbrace{11\cdots11}^{3^m\text{個}}$$
$$=(10^{3^m})^2\times\boxed{3^m}+10^{3^m}\times\boxed{3^m}+\boxed{3^m}$$
$$=\{(10^{3^m})^2+10^{3^m}+1\}\times3^m\times L \quad \cdots\cdots①$$

ここで, $\boxed{n}=\dfrac{10^n-1}{9} \rightleftarrows 10^n=9\times\boxed{n}+1$ より.

$$10^{3^m}=9\times\boxed{3^m}+1=9\times(3^m\times L)+1$$
$$(10^{3^m})^2=(9\times3^m\times L+1)^2=(9\times3^m\times L)^2+18\times3^mL+1$$

これらを①に代入すると,

$$\boxed{3^{m+1}}=\{\underbrace{(9\times3^mL)^2+27\times3^mL}_{\text{この部分は9の倍数.}}+3\}\times3^mL$$

$\{\ \}$内は 3で割り切れるが 3^2では割り切れない.

よって $\boxed{3^{m+1}}$ は 3^{m+1}で割り切れるが 3^{m+2}では割り切れない

以上により題意は証明された.　　∴終

(2) (i) nが27で割り切れるとき. $n=3^3k=27k$ とおくと. （kは自然数）

$$\boxed{n}=\boxed{27k}=\overbrace{11\cdots111}^{27\text{個}}\overbrace{11\cdots111}^{27\text{個}}\cdots\cdots\overbrace{11\cdots111}^{27\text{個}} \leftarrow 27\text{個が}k\text{組.}$$
$$=\{(10^{27})^{k-1}+(10^{27})^{k-2}+\cdots+10^{27}+1\}\times\boxed{27}$$

(1)により, $\boxed{27}=\boxed{3^3}$ は $3^3=27$ で割り切れるので, $\boxed{n}$は27で割り切れる.

(ii) $\boxed{n}$が27で割り切れるとき $\boxed{n}=\dfrac{10^n-1}{9}=27l$ （lは自然数）とおくと.

$$27\times9l=10^n-1=(1+9)^n-1=\sum_{j=1}^{n}9^j{}_nC_j$$
$$=9{}_nC_1+9^2{}_nC_2+9^3{}_nC_3+\cdots$$
$$=9\{n+9\cdot\frac{n(n-1)}{2!}+9^2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\cdots\cdots\}$$

$$27l = \underbrace{n + \frac{9}{2}n(n-1)} + \frac{9^2}{3!}n(n-1)(n-2) + \cdots$$

→ ここから後は27の倍数である.

$n \cdot \dfrac{9(n-1)+2}{2}$ が27の倍数となる.

$9(n-1)+2$ は3で割り切れないので, <u>n が27で割り切れる.</u>

(i)(ii)より題意は示された

(1)　mに関する数学的帰納法で示す。

$\boxed{3}=111=3\times37$なので，$m=1$のときの題意が成立は明らかである。次に，$\boxed{3^m}$が3^mでは割り切れるが3^{m+1}では割り切れないと仮定し，このことを$\boxed{3^m}=3^m\times L$；$L\not\equiv 0 \pmod 3$と表示する。$3^{m+1}=3\times3^m$なので$\boxed{3^{m+1}}$には1が3×3^m個並ぶことになり，これを3^m個ずつ並んだ1が3ブロックと見ることで

$$\boxed{3^{m+1}}=\boxed{3^m}\times10^{2\cdot3^m}+\boxed{3^m}\times10^{3^m}+\boxed{3^m}$$
$$=\boxed{3^m}\left(10^{2\cdot3^m}+10^{3^m}+1\right)$$

と表示できる。ここで，$10^{2\cdot3^m}+10^{3^m}+1$の各位の数の和は明らかに$1+1+1=3$なので，これは3の倍数ではあるが$9=3^2$の倍数ではない。そこで，これを$3\times L'$；$L'\not\equiv 0 \pmod 3$と書けば，$\boxed{3^{m+1}}=(3^m\times L)\times(3\times L')=3^{m+1}\times LL'$とできて，$LL'\not\equiv 0 \pmod 3$なので，$\boxed{3^{m+1}}$についても，$3^{m+1}$で割り切れるが，$3^{m+2}$では割り切れないことがわかる。

よって，数学的帰納法により題意は示された。

(2) $n=27k$（kは自然数）と書く。

$\boxed{n}=\boxed{27k}$ に並ぶ $27k$ 個の 1 を 27 個ずつの k ブロックと見ることで，

$$\boxed{n}=\boxed{27}\left\{(10^{27})^{k-1}+(10^{27})^{k-2}+\cdots+10^{27}+1\right\}$$

と書くことができて，$\boxed{27}=\boxed{3^3}$ は(1)により，$3^3=27$ で割り切れるので，$\boxed{n}$ も 27 で割り切れる。逆に $\boxed{n}=\dfrac{10^n-1}{9}=27k'$（$k'$は自然数）のとき，$10^n-1=(9+1)^n-1=\sum_{r=1}^{n}{}_nC_r\cdot 9^r$ より，

$$\sum_{r=1}^{n}{}_nC_r\cdot 9^{r-1}=27k'$$

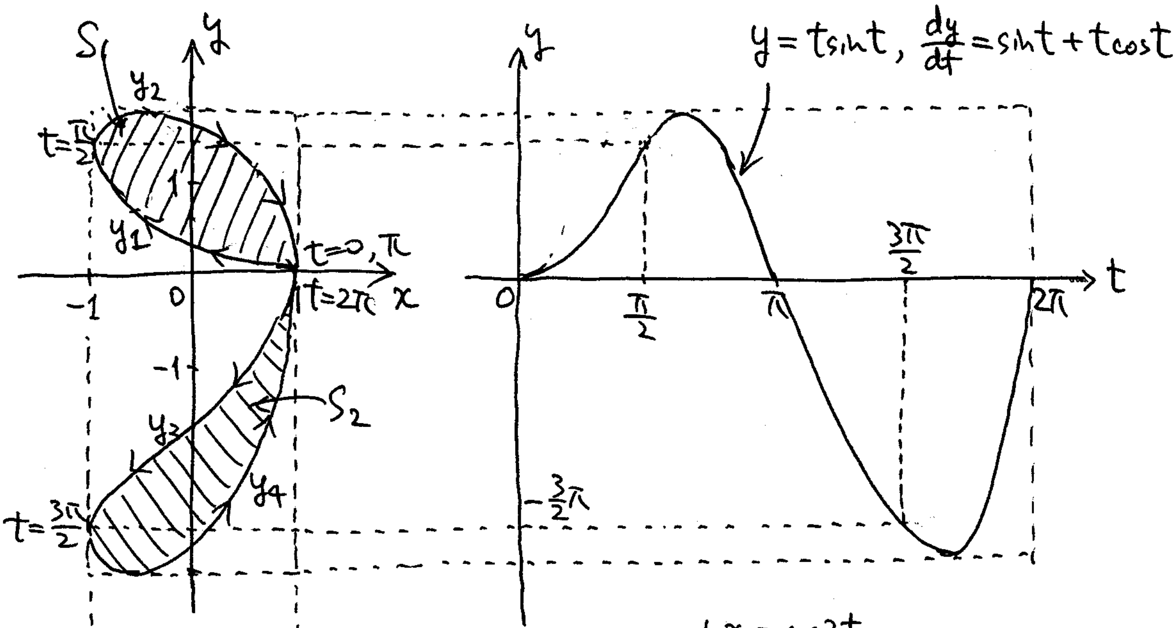
$$\iff {}_nC_1+\frac{9}{2}\cdot{}_nC_2=27k'-\sum_{r=3}^{n}{}_nC_r\cdot 9^{r-1}$$

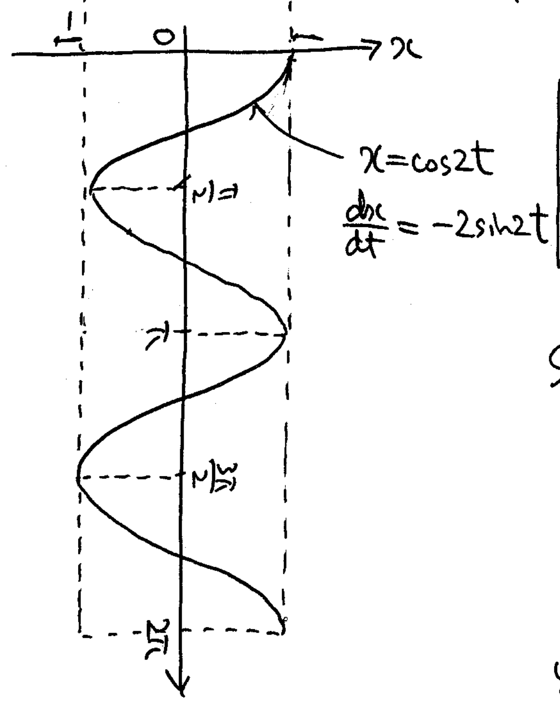
この式で，右辺は 27 の倍数である。

$$\text{左辺}=n\left\{1+\frac{9(n-1)}{2}\right\}=\frac{n\{9(n-1)+2\}}{2}$$

について，$9(n-1)+2$ は明らかに 3 の倍数ではないので，27 の倍数となることと n が 27 の倍数であることが同値である。

以上により，題意は示された。





曲線 $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y = t\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ の概形は、図のようになる。

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$, $\pi \leqq t \leqq \frac{3}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi \leqq t \leqq 2\pi$ の弧に対応する y 座標を、それぞれ $y_1 \sim y_4$ とする。

2つの部分の面積を S_1, S_2 とすると、

$$S_1 = \int_{-1}^{1} y_2\,dx - \int_{-1}^{1} y_1\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y_2 \frac{dx}{dt}dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y_1 \frac{dx}{dt}dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y_2 \frac{dx}{dt}dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} y_1 \frac{dx}{dt}dt$$

$y_1 = y_2 = t\sin t$ なので

$$S_1 = \int_0^{\pi} (t\sin t)(-2\sin 2t)\,dt$$

同様に

$$S_2 = \int_{-1}^{1}(-y_4)\,dx - \int_{-1}^{1}(-y_3)\,dx = \int_{-1}^{1} y_3\,dx - \int_{-1}^{1} y_4\,dx$$

$$= \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi} y_3 \frac{dx}{dt}dt - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} y_4 \frac{dx}{dt}dt = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi} y_3 \frac{dx}{dt}dt + \int_{2\pi}^{\frac{3}{2}\pi} y_4 \frac{dx}{dt}dt$$

$$= \int_{2\pi}^{\pi} (t\sin t)(-2\sin 2t)\,dt$$

したがって，求める面積は

$$S_1+S_2=-2\int_0^{\pi} t\sin t\sin 2t\,dt-2\int_{2\pi}^{\pi} t\sin t\sin 2t\,dt$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\int t\sin t\sin 2t\,dt &= \int t\cdot 2\sin^2 t\cos t\,dt\\
&= 2\int t\cdot\sin^2 t(\sin t)'\,dt\\
&= 2\left\{t\cdot\frac{\sin^3 t}{3}-\int 1\cdot\frac{\sin^3 t}{3}\,dt\right\}\\
&= \frac{2}{3}t\sin^3 t-\frac{2}{3}\int\frac{3\sin t-\sin 3t}{4}\,dt\\
&= \frac{2}{3}t\sin^3 t-\frac{1}{6}\left(-3\cos t+\frac{\cos 3t}{3}\right)+C\\
&= \underbrace{\frac{2}{3}t\sin^3 t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{18}\cos 3t}_{\text{この部分を } g(t) \text{ とおく．}}+C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1+S_2 &= -2\Big[g(t)\Big]_0^{\pi}-2\Big[g(t)\Big]_{2\pi}^{\pi}\\
&= 2\{g(0)-g(\pi)\}+2\{g(2\pi)-g(\pi)\}\\
&= 2\{g(0)+g(2\pi)-2g(\pi)\}
\end{aligned}$$

ここで $g(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{18}=\frac{4}{9}$，$g(2\pi)=\frac{4}{9}$，$g(\pi)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{18}=-\frac{4}{9}$

$$S_1+S_2=\underline{\frac{32}{9}}\ \cdots$$

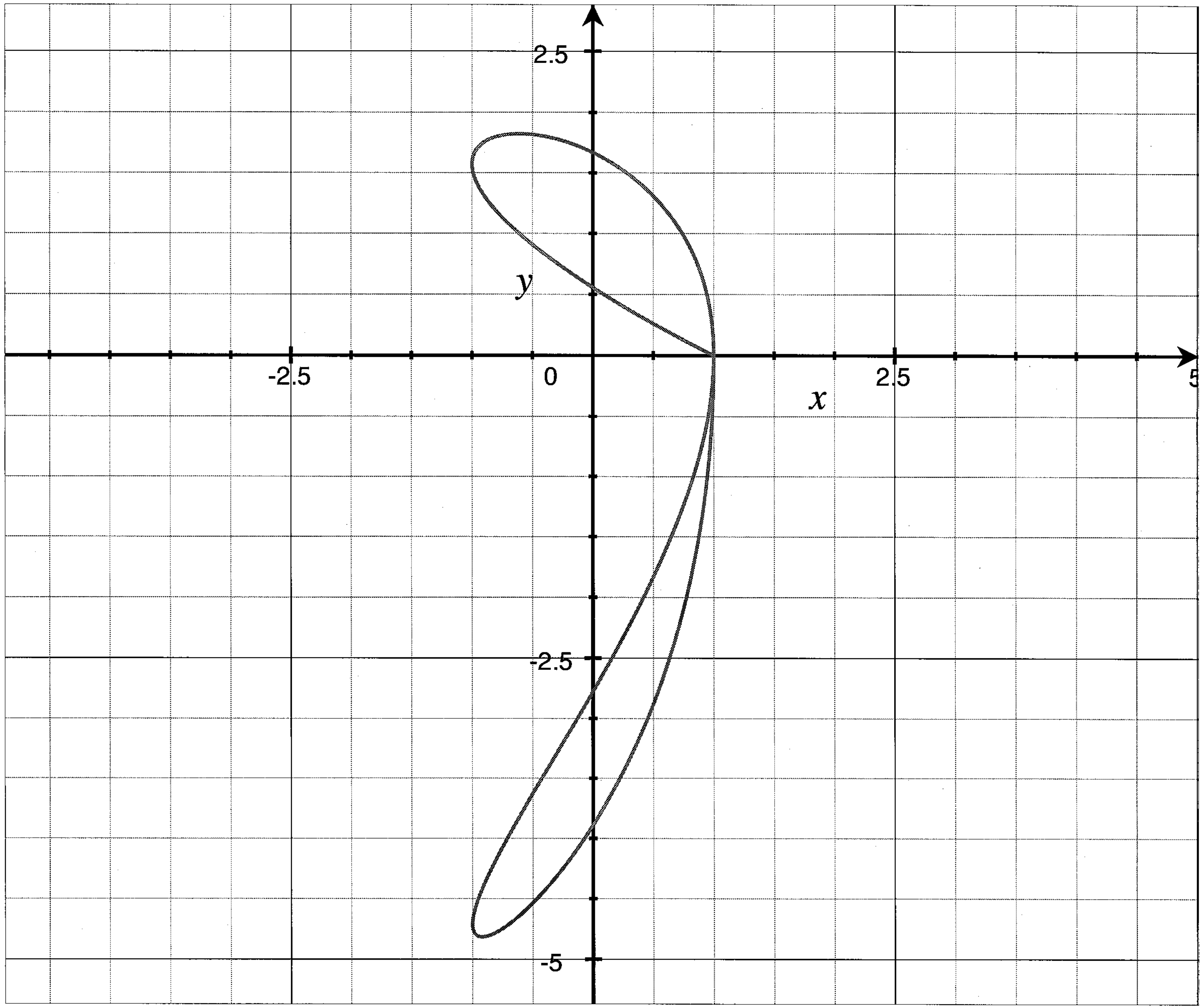
注1．不定積分は，他の表現も可．たとえば

$$\int t\sin t\sin 2t\,dt=\frac{2}{9}(3t\sin^3 t+3\cos t-\cos^3 t)+C$$

注2．解答例中では t-x 平面，t-y 平面のグラフから x-y 平面のグラフを描き起こしている．$x(t)$，$y(t)$ の増減表をつくるという一般的方法でも可能．

注3．曲線が自ら交わる（共有点をもつ）のは，$t=0,\pi,2\pi$ に対応する点 $(1,0)$ だけである．厳密にはこの点についての論証も必要との見解もあろうが，$t=\frac{\pi}{2}$，$t=\frac{3\pi}{2}$ の点を除いた増減を追跡していけば，図のように描けるであろう．

注4．コンピュータで正確に描いた図を次頁に載せる．


2.5
y
-2.5
0
2.5
x
5
-2.5
-5