$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n+$ ($n+1$次以上の項)

とおき、kについての数学的帰納法によって証明する。

(i) $k=1$ のとき

$(1+x)^1P(x)=a_0+(a_0+a_1)x+(a_1+a_2)x^2+\cdots+(a_{n-1}+a_n)x^n+\cdots$

のn次以下の項の係数がすべて整数であるとき，すなわち，

$a_0,\ a_0+a_1,\ a_1+a_2,\ \cdots,\ a_{n-1}+a_n\in\mathbb{Z}$ のとき，

$a_1=(a_0+a_1)-a_0\in\mathbb{Z}$

$a_2=(a_1+a_2)-a_1\in\mathbb{Z}$

$\vdots$

$a_n=(a_{n-1}+a_n)-a_{n-1}\in\mathbb{Z}$

となるから，$P(x)$のn次以下の項の係数は、すべて整数となる。

すなわち，$k=1$のとき命題は成りたつ。

(ii) あるkにおいて，命題が成りたつものと仮定する．すなわち，

$(1+x)^kP(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+b_nx^n+\cdots$

において，

$(b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$のすべてが整数ならば

$(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$のすべてが整数である ‥‥ (*)

が成立するものと仮定する。

$k+1$においても命題は成立するか。

$(1+x)^{k+1}P(x)=(1+x)\cdot(1+x)^kP(x)$

$=(1+x)(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots)$

$=b_0+(b_0+b_1)x+(b_1+b_2)x^2+\cdots+(b_{n-1}+b_n)x^n+\cdots$

において，

$(b_0,\ b_0+b_1,\ b_1+b_2,\ \cdots,\ b_{n-1}+b_n)$のすべてが整数ならば，

(i)と同様にして $(b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$のすべてが整数である ‥‥ (**)

という命題が成りたつ．(*)と(**)を合わせれば，

$(b_0,\ b_0+b_1,\ \cdots,\ b_{n-1}+b_n)$のすべてが整数ならば $(a_0,\ \cdots,\ a_n)$のすべてが整数

となるので，$k+1$においても命題は成立する．(i)(ii)より題意は示された。(終)

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n + A(x)$$
$$(1+x)^k P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + B(x)$$

とおく.（$A(x)$, $B(x)$は共に$n+1$次以上の項の和）

このとき.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + B(x)$$
$$= (1 + {}_kC_1 x + {}_kC_2 x^2 + \cdots + {}_kC_k x^k)(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n + A(x))$$

が恒等式となるので, 次数の低い順に係数を比較すると.

$$a_0 = p_0$$
$$a_1 = p_1 + p_0 {}_kC_1$$
$$a_2 = p_2 + p_1 {}_kC_1 + p_0 {}_kC_2$$
$$\vdots$$

すなわち　$n \leqq k$ のとき

$$a_i = p_i + p_{i-1} \cdot {}_kC_1 + \cdots\ p_0 {}_kC_i \quad (i = 0, 1, \cdots n)$$

$k < n$ のとき

$$a_i = p_i + p_{i-1} {}_kC_1 + \cdots\ p_{i-k} {}_kC_k \quad (i = 0, 1 \cdots k)$$

が成立する　いずれにしても　$a_0, a_1 \cdots a_n$ が整数, ${}_kC_i$ も整数なので

$i=0$のとき　$p_0 = a_0$　より　p_0は整数

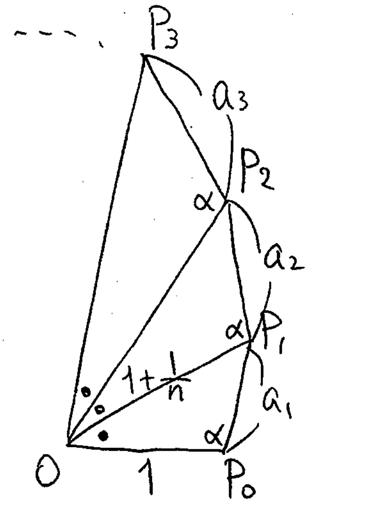
$i=1$のとき　$p_1 = a_1 - p_0 {}_kC_1$　より　p_1は整数

$i=2$のとき　$p_2 = a_2 - p_1 {}_kC_1 - p_0 {}_kC_2$　より　p_2は整数

よって一般に

$$p_j = a_j - (p_0 \sim p_{j-1}\text{, および二項係数からなる式})$$

とかけるので　帰納的に　$p_0, p_1, p_2 \cdots, p_n$ は整数となる.（証明終）



$\bullet = \frac{\pi}{n}$, $\angle OP_0P_1 = \alpha$

条件①,②から図のようになる。

$\triangle P_{k-1}OP_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ たちはすべて相似であり、隣りあう三角形の相似比は

$$OP_0 : OP_1 = 1 : \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

となる。したがって、

$$a_2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_1$$
$$a_3 = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 a_1$$
$$\vdots$$
$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} a_1$$

となる。

数列 $\{a_k\}$ は等比数列だから、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1}{\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1} \cdot a_1 \quad \cdots\cdots ①$$

また、$\triangle OP_0P_1$ における余弦定理より

$$\begin{aligned} a_1^2 &= 1^2 + \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \\ &= 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) + \frac{1}{n^2} \\ &= 2\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n^2} \quad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

①,②より

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \left\{4\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin^2\frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}\left\{4\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} + 1\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}\left\{4\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2 + 1\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = (e-1)\left\{4 \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot 1^2 + 1\right\}^{\frac{1}{2}} = (e-1)\sqrt{\pi^2+1}$$

(1) 曲線 $y=x^2\ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上の2点を $P(p,p^2)$, $Q(q,q^2)$ $(-1\leqq p\leqq 1,\ -1\leqq q\leqq 1)$ とおけば、$R\left(\dfrac{2p+q}{3},\ \dfrac{2p^2+q^2}{3}\right)$ となる。$(a,b)\in D$ となるための必要十分条件は、

$R(a,b)$ に対応する2点 P, Q が曲線 $y=x^2\ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上に存在すること、

すなわち、

$\dfrac{2p+q}{3}=a$, $\dfrac{2p^2+q^2}{3}=b$, $-1\leqq p\leqq 1$, $-1\leqq q\leqq 1$ をみたす (p,q) が存在すること

となる。ここで q を消去すれば、

$2p^2+(3a-2p)^2=3b$, $-1\leqq p\leqq 1$, $-1\leqq 3a-2p\leqq 1$ をみたす p が存在すること。

すなわち、p についての方程式

$$2p^2-4ap+3a^2-b=0$$

が、区間 $-1\leqq p\leqq 1$ かつ $\dfrac{3a-1}{2}\leqq p\leqq\dfrac{3a+1}{2}$ に解をもつこと

となる。

$$f(p)=2p^2-4ap+3a^2-b$$

とおけば、$f(p)=0$ が実数解をもつために

判別式 $D/4=(-2a)^2-2(3a^2-b)=2(b-a^2)\geqq 0 \iff b\geqq a^2$

が必要条件となる。すなわち、$f(a)=a^2-b\leqq 0$

また、$f(\pm 1)=3a^2\mp 4a+2-b=3\left(a\mp\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}-b$

$f\left(\dfrac{3a\pm 1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2\pm a+\frac{1}{2}-b=\frac{3}{2}\left(a\pm\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}-b$ である。

a の値に応じた区間

I_p：$-1\leqq p\leqq 1$ かつ $\dfrac{3a-1}{2}\leqq p\leqq\dfrac{3a+1}{2}$

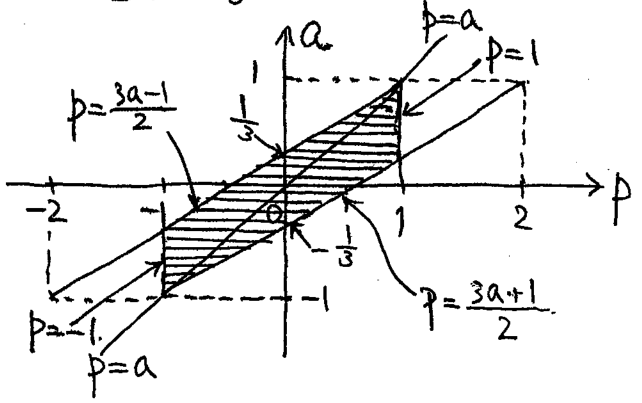
の様子は図のようになることから、

$f(p)$ の軸 $p=a$ は、つねに区間 I_p に含まれている。

よって、$f(p)=0$ の解が I_p に存在する条件は、I_p の両端のいずれかにおける $f(p)$ の値が0以上になること、

といいかえることができる。

以下、$a=-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}$ を境に分類する。



(i) $-1 \leqq a \leqq -\frac{1}{3}$ のとき，$\max\left\{f(-1), f\left(\frac{3a+1}{2}\right)\right\} \geqq 0$

$$\rightleftarrows f(-1) \geqq 0 \text{ or } f\left(\frac{3a+1}{2}\right) \geqq 0$$
$$\rightleftarrows b \leqq 3a^2+4a+2 \text{ or } b \leqq \frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$$
$$\rightleftarrows b \leqq \max\left(3a^2+4a+2, \frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}\right)$$
$$\rightleftarrows b \leqq 3a^2+4a+2$$

(ii) $-\frac{1}{3} \leqq a \leqq \frac{1}{3}$ のとき　$\max\left\{f\left(\frac{3a-1}{2}\right), f\left(\frac{3a+1}{2}\right)\right\} \geqq 0$

$$\rightleftarrows f\left(\frac{3a-1}{2}\right) \geqq 0 \text{ or } f\left(\frac{3a+1}{2}\right) \geqq 0$$
$$\rightleftarrows b \leqq \frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2} \text{ or } b \leqq \frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$$
$$\rightleftarrows b \leqq \max\left(\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}\right)$$
$$\rightleftarrows \begin{cases} -\frac{1}{3} \leqq a \leqq 0 \text{ のとき } & b \leqq \frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2} \\ 0 \leqq a \leqq \frac{1}{3} \text{ のとき } & b \leqq \frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2} \end{cases}$$

(iii) $\frac{1}{3} \leqq a \leqq 1$ のとき　$\max\left\{f\left(\frac{3a-1}{2}\right), f(1)\right\} \geqq 0$

$$\rightleftarrows f\left(\frac{3a-1}{2}\right) \geqq 0 \text{ or } f(1) \geqq 0$$
$$\rightleftarrows b \leqq \frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2} \text{ or } b \leqq 3a^2-4a+2$$
$$\rightleftarrows b \leqq \max\left(\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2}, 3a^2-4a+2\right)$$
$$\rightleftarrows b \leqq 3a^2-4a+2.$$

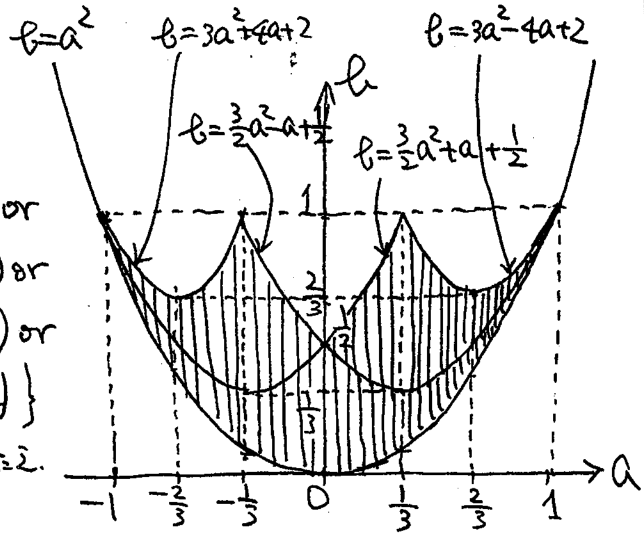
まとめると、

$(a, b) \in D$

$\rightleftarrows b \geqq a^2$ and

$$\left\{\begin{array}{l}\left(-1 \leqq a \leqq -\frac{1}{3} \text{ and } b \leqq 3a^2+4a+2\right) \text{ or} \\ \left(-\frac{1}{3} \leqq a \leqq 0 \text{ and } b \leqq \frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2}\right) \text{ or} \\ \left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{3} \text{ and } b \leqq \frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}\right) \text{ or} \\ \left(\frac{1}{3} \leqq a \leqq 1 \text{ and } b \leqq 3a^2-4a+2\right)\end{array}\right\}$$

---(1)のこたえ.



(2) Dを図示すれば，右図のようになる.

(a, b)を(x, y)に読み替えたものが解答である.

(1) $(P+Q)A=(P+Q)\{aP+(a+1)Q\}$
$$=aP^2+aQP+(a+1)PQ+(a+1)Q^2$$
$$=aP+O+O+(a+1)Q$$
$$=A$$

(2) $a>0$ のとき $\det A=a(a+1)\neq 0$ なので A^{-1} が存在する.

(1)の結果の両辺に右から A^{-1} をかけると,
$$(P+Q)A\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}$$
$$\therefore P+Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E \text{ と書く.}$$
行列 P, Q についての連立方程式
$$\begin{cases}aP+(a+1)Q=A\\P+Q=E\end{cases}$$
を解くと,
$$\begin{cases}P=-A+(a+1)E=-\begin{pmatrix}a&0\\1&a+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+1&0\\0&a+1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}}.\\Q=A-aE=\begin{pmatrix}a&0\\1&a+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}}.\end{cases}$$

(3) $A_k=\begin{pmatrix}k&0\\1&k+1\end{pmatrix}=kP+(k+1)Q\quad(k=2,3,\cdots,n)$

ここで, $P^2=P$, $Q^2=Q$ より帰納的に $P^k=P$, $Q^k=Q\ (k=2,3,\cdots)$ となる.
また, $PQ=QP=O$ に注意しつつ,
$$\begin{cases}A_n=nP+(n+1)Q\\A_{n-1}=(n-1)P+nQ\\\quad\vdots\\A_3=3P+4Q\\A_2=2P+3Q\end{cases}$$
のすべてをかけると, P, Q の積を含む項はすべて消えるので,
$$A_nA_{n-1}\cdots A_3A_2=n!P^{n-1}+\frac{(n+1)!}{2!}Q^{n-1}$$
$$=n!P+\frac{(n+1)!}{2}Q$$
$$=n!\left(P+\frac{n+1}{2}Q\right)\longrightarrow=\underline{n!\begin{pmatrix}1&0\\\frac{n-1}{2}&\frac{n+1}{2}\end{pmatrix}}.$$

いずれも $\begin{cases} \text{(i)} & 0 \leqq m < n-1 \\ \text{(ii)} & m = n \end{cases}$ につき分類する.

(1) (i) $m<n$ のとき　$n-m$ 回目に裏が，つづく $n-m+1$ 回目から n 回目までの m 回続けて表が出ればよいので　$p_m = (1-p)p^m$

(ii) $m=n$ のとき　すべて表が出る場合で　$p_m = p^n$

よって　$p_m = \begin{cases} (1-p)p^m & (0 \leqq m < n) \\ p^n & (m=n) \end{cases}$

(2) (i) $m<n$ のとき

$$\begin{aligned} q_m &= p_0 + p_1 + \cdots + p_m \\ &= (1-p)(1+p+p^2+\cdots+p^m) \\ &= (1-p)\cdot\frac{1-p^{m+1}}{1-p} \\ &= 1-p^{m+1} \end{aligned}$$

(ii) $m=n$ のとき

$$\begin{aligned} q_m &= (p_0+p_1+\cdots+p_{n-1}) + p_n \\ &= (1-p^n) + p^n = 1 \end{aligned}$$

よって　$q_m = \begin{cases} 1-p^{m+1} & (0 \leqq m < n) \\ 1 & (m=n) \end{cases}$

(3) (i) $m<n$ のとき

$\left(\begin{matrix} 1\text{回目の前後のブロックの長さ} \\ 2\text{回目} \quad〃 \quad〃 \end{matrix}\right) = \overset{㋐}{\left(\begin{matrix} m \\ m\text{以下} \end{matrix}\right)}$ or $\overset{㋑}{\left(\begin{matrix} m\text{以下} \\ m \end{matrix}\right)}$

となる確率を求めればよい. ㋐と㋑は $\left(\begin{matrix} m \\ m \end{matrix}\right)$ の場合が重複しているから,

$$\begin{aligned} r_m &= p_m\cdot q_m + q_m\cdot p_m - p_m\cdot p_m \\ &= p_m(2q_m - p_m) \\ &= (1-p)\cdot p^m\{2-(1+p)p^m\} \end{aligned}$$

(ii) $n=m$ のとき　$\left(\begin{matrix} n \\ n-1\text{以下} \end{matrix}\right)$ or $\left(\begin{matrix} n-1\text{以下} \\ n \end{matrix}\right)$ or $\left(\begin{matrix} n \\ n \end{matrix}\right)$ と考えて,

$$\begin{aligned} r_n &= 2p_n\cdot q_{n-1} + p_n\cdot p_n \\ &= 2p_n(1-p^n) + p^{2n} = p^n(2-p^n) \end{aligned}$$

よって　$r_m = \begin{cases} (1-p)p^m\{2-(1+p)p^m\} & (0 \leqq m < n) \\ p^n(2-p^n) & (m=n) \end{cases}$

(1) $0<x<a$ のとき，t-u 平面において

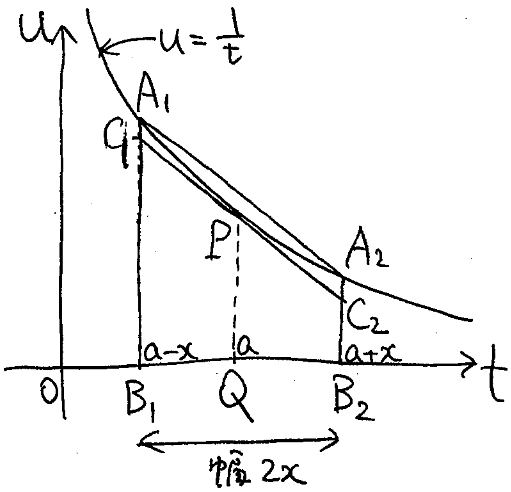
$P\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $Q(a, 0)$,

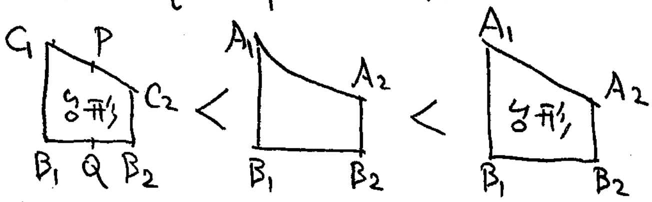
$A_1\left(a-x, \frac{1}{a-x}\right)$, $B_1(a-x, 0)$, C_1

$A_2\left(a+x, \frac{1}{a+x}\right)$, $B_2(a+x, 0)$, C_2

をとる。C_1C_2 は，P における $u=\frac{1}{t}$ の接線である．

曲線 $u=\frac{1}{t}$ は下に凸だから，





すなわち，

$$\frac{1}{2}\cdot\underbrace{B_1B_2}_{\substack{\parallel \\ 2x}}\cdot\underbrace{(B_1C_1+B_2C_2)}_{\substack{\parallel \\ 2PQ=\frac{2}{a}}} < \int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt < \frac{1}{2}\cdot\underbrace{B_1B_2}_{\substack{\parallel \\ 2x}}\cdot(A_1B_1+A_2B_2)$$

したがって

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt < x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

が示された．

(2)
$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}\,dt + \int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}\,dt \quad \cdots\cdots ①$$

$a=\frac{5}{4}$, $x=\frac{1}{4}$ とおいて (1) を用いると． $\frac{2}{5} < \int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}\,dt < \frac{5}{12}$ $\cdots\cdots ②$

$a=\frac{7}{4}$, $x=\frac{1}{4}$ とおいて (1) を用いると $\frac{2}{7} < \int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}\,dt < \frac{7}{24}$ $\cdots\cdots ③$

① および ②＋③ より．

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{7} < \int_1^2\frac{1}{t}\,dt < \frac{5}{12}+\frac{7}{24}$$

$$\frac{24}{35} < \log 2 < \frac{17}{24}$$

$$0.685\cdots < \log 2 < 0.708\cdots$$

よって　$0.68 < \log 2 < 0.71$　が示された．

（終）

(2) $a=\frac{3}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ を(1)の結果に代入すると、

$$\frac{2x}{a}=\frac{2}{3}=0.66\cdots, \quad x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)=\frac{3}{4}=0.75$$

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt=\int_{1}^{2}\frac{1}{t}\,dt=\left[\log t\right]_{1}^{2}=\log 2$$

よって、　$0.66\cdots < \log 2 < 0.75$

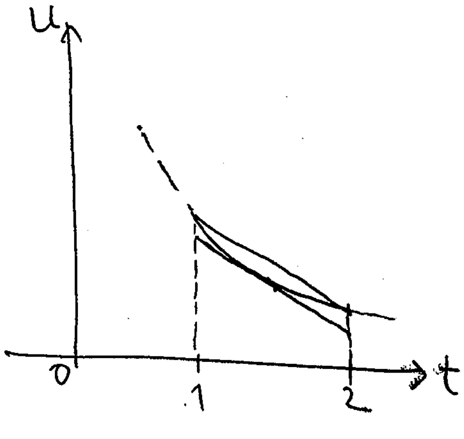
これでは、　$0.68 < \log 2 < 0.71$ を導けない。

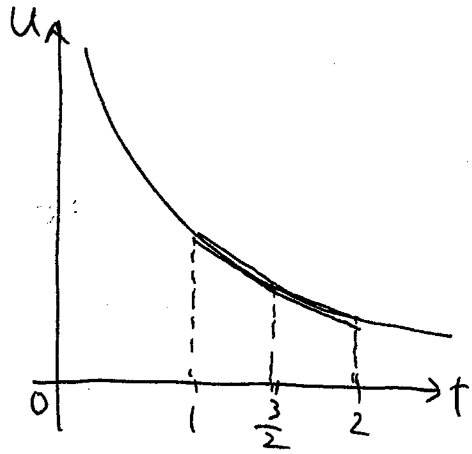
もっと精度の高い近似を行わなければならない。

そこで

$$\int_{1}^{2}\frac{1}{t}\,dt=\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}\,dt+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{t}\,dt$$

と区間を分割すると、近似の精度が上がる。





左の図より右の図の方が、よく近似するということである。