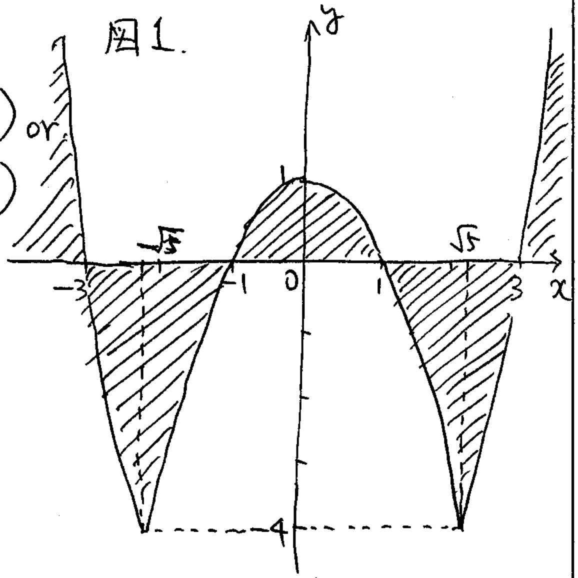
(1) $y(y-|x^2-5|+4) \leqq 0$ ……①

$$\rightleftarrows \begin{cases} (y \geqq 0 \text{ and } y \leqq |x^2-5|-4) \text{ or} \\ (y \leqq 0 \text{ and } y \geqq |x^2-5|-4) \end{cases}$$

①の領域は図1の通り.

図1

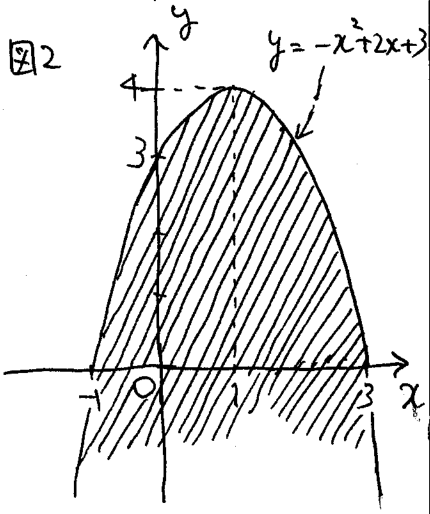


$y+x^2-2x-3 \leqq 0$ ……②

$$\rightleftarrows y \leqq -x^2+2x+3$$
$$= -(x+1)(x-3)$$

②の領域は図2の通り.

図2



これらを重ねあわせて, 領域Dは図3の通り.

(2) Dの面積は

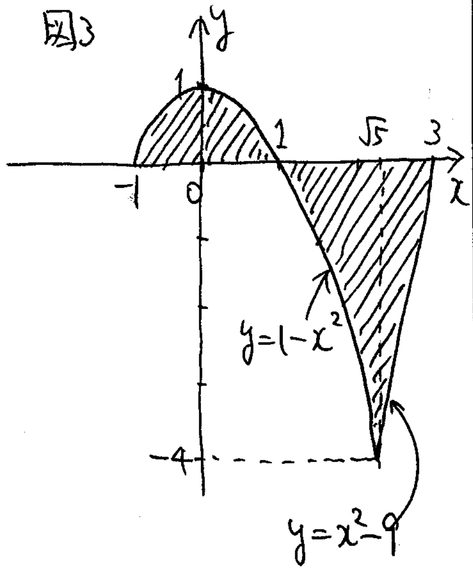
$$\int^{1}(1-x^2)dx+\int_{1}^{\sqrt{5}}(x^2-1)dx+\int_{\sqrt{5}}^{3}(9-x^2)dx$$

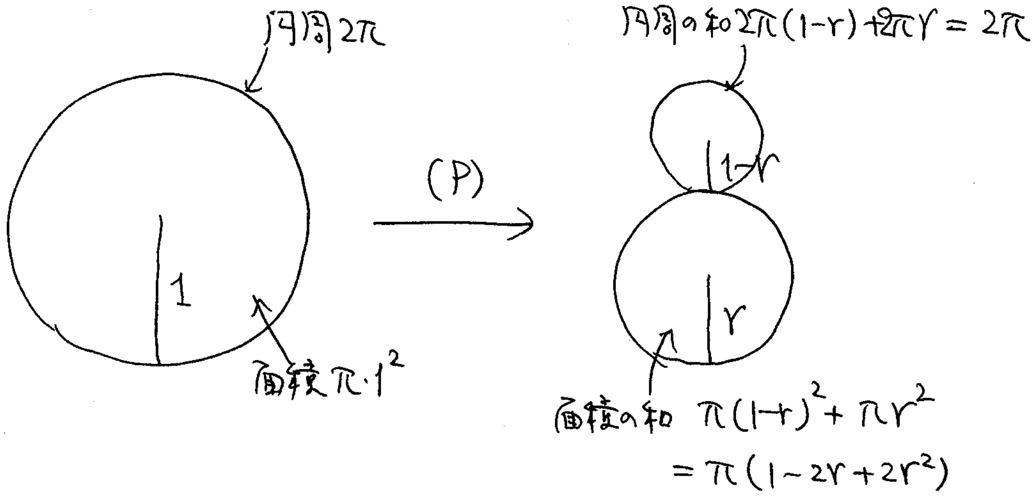
$$=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{\sqrt{5}}+\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{5}}^{3}$$

$$=\left(2-\frac{2}{3}\right)+\frac{5\sqrt{5}-1}{3}-(\sqrt{5}-1)+9(3-\sqrt{5})-\frac{27-5\sqrt{5}}{3}$$

$$=20-\frac{20\sqrt{5}}{3}$$

図3





(1) 1回の操作(P)によって1つの円が2つの円に分割されるが，
分割前後の円周の長さの和は変わらない。
よって操作(P)を n 回行っても円周の長さの和は一定のままで 2π.

(2) 1つの円は、操作(P)で2つの円に分割され，
面積の和は分割前後で $1-2r+2r^2$ 倍となる。
よって2回目の操作で得られる4つの円の面積の和は $\pi(1-2r+2r^2)^2$.

(3) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和は $\pi(1-2r+2r^2)^n$.

$f(m) = (5m^4$ の下2桁$)$　の値を，$1 \leqq m \leqq 10$ について調べると，次のようになる．

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m^4	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000
$f(m)$	5	80	5	80	25	80	5	80	5	0

正の整数 m の下1桁（一の位）が k のとき，

$$m = k + 10l \qquad (l \in \mathbb{Z})$$

とおく．

$$m^2 = k^2 + 20kl + 100l^2$$

$$m^4 = k^4 + 40k^3l + \underbrace{400k^2l^2 + 2(k^2+20kl)\cdot 100l^2 + (100l^2)^2}_{100\text{の倍数なので }100N\text{ とおく．}}$$

$$5m^4 = 5k^4 + \underbrace{200k^3l + 500N}_{100\text{の倍数．}}$$

$5m^4$ と $5k^4$ とは，下2桁が一致するので，

$$f(m) = f(k)$$

したがって，数列

$$f(m) \quad m = 1, 2, 3, \cdots$$

は，周期10で循環する。

つまり，$f(m)$ の値は，上記の表で出尽くしており，

$$0,\ 5,\ 25,\ 80$$

のいずれかに限られる．

(1) n回のうち、$n-m$回目に表が，$n-m+1$回目からn回目までのm回続けて表が出ればよいので　$p_m = (1-p)p^m$

(2) $q_m = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_m$

$= (1-p)(1+p+p^2+\cdots+p^m)$

$= (1-p)\cdot\dfrac{1-p^{m+1}}{1-p}$

$= 1-p^{m+1}$

(3) $\begin{pmatrix} \text{1回目の最後のブロックの高さ} \\ \text{2回目}\quad〃\quad〃\quad〃 \end{pmatrix} = \overset{㋐}{\begin{pmatrix} m \\ m\text{以下} \end{pmatrix}}$ または $\overset{㋑}{\begin{pmatrix} m\text{以下} \\ m \end{pmatrix}}$

となる確率を求めればよい。㋐と㋑は $\begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}$ の場合が重複していることに注意すれば，

$r_m = p_m\cdot q_m + q_m\cdot p_m - p_m\cdot p_m$

$= 2p_m q_m - p_m^2$

$= p_m(2q_m - p_m)$

$= (1-p)p^m\{2(1-p^{m+1}) - (p^m - p^{m+1})\}$

$= (1-p)p^m\{2-(1+p)p^m\}$