第　1　問

O を原点とする座標平面上の4点 P_1，P_2，P_3，P_4 で，条件

$$\overrightarrow{OP}_{n-1} + \overrightarrow{OP}_{n+1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP}_n \qquad (n = 2,\ 3)$$

を満たすものを考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) P_1，P_2 が曲線 $xy = 1$ 上にあるとき，P_3 はこの曲線上にはないことを示せ。

(2) P_1，P_2，P_3 が円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上にあるとき，P_4 もこの円周上にあることを示せ。

第　2　問

コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく，p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて3個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1) P_2 を p で表せ。

(2) $n \geqq 3$ のとき，P_n を p と n で表せ。

第　3　問

O を原点とする座標平面上に，y 軸上の点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ と，直線 $m : y=(\tan\theta)x$ が与えられている。ここで，$p>1$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。

いま，傾きが α の直線 ℓ を対称軸とする対称移動を行うと，原点 O は直線 $y=1$ 上の，第 1 象限の点 Q に移り，y 軸上の点 P は直線 m 上の，第 1 象限の点 R に移った。

(1) このとき，$\tan\theta$ を α と p で表せ。

(2) 次の条件を満たす点 P が存在することを示し，そのときの p の値を求めよ。

条件：どのような θ （$0<\theta<\frac{\pi}{2}$）に対しても，原点を通り直線 ℓ に垂直な直線は $y=\left(\tan\frac{\theta}{3}\right)x$ となる。

第　4　問

次の条件を満たす組（x, y, z）を考える。

条件(A)：x, y, z は正の整数で，$x^2+y^2+z^2=xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件(A)を満たす組（x, y, z）で，$y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2) 組（a, b, c）が条件(A)を満たすとする。このとき，組（b, c, z）が条件(A)を満たすような z が存在することを示せ。

(3) 条件(A)を満たす組（x, y, z）は，無数に存在することを示せ。

第　5　問

$a_1 = \dfrac{1}{2}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(1+a_n)^2} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，以下の問い に答えよ。

(1) 各 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおく。
$n > 1$ のとき，$b_n > 2n$ となることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。

第　6　問

$x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ $(x>0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数を持つことを示せ。すなわち，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる $x>0$ がただ1つ存在することを示せ。

(2) 前問(1)で定められた逆関数を $y=g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする。このとき，定積分 $\displaystyle\int_{8}^{27} g(x)\,dx$ を求めよ。