$\overrightarrow{OP_n}=\overrightarrow{p_n}$ と書くと，$\overrightarrow{p_{n-1}}+\overrightarrow{p_{n+1}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{p_n}$　$(n=2,3)$

(1) $P_1\left(s,\frac{1}{s}\right)$，$P_2\left(t,\frac{1}{t}\right)$　$(st\neq 0)$ とおくと，

$\overrightarrow{p_3}=\frac{3}{2}\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1}$ より　$P_3\left(\frac{3}{2}t-s,\ \frac{3}{2t}-\frac{1}{s}\right)$

$x=\frac{3}{2}t-s$，$y=\frac{3}{2t}-\frac{1}{s}$ について xy の値を計算すると，

$$xy=2-\frac{3}{2}\left(\frac{t}{s}+\frac{s}{t}\right)$$

もし P_3 が曲線 $xy=1$ 上にあるのなら，

$$xy=1 \rightleftarrows \frac{3}{2}\left(\frac{t}{s}+\frac{s}{t}\right)=1 \rightleftarrows \frac{1}{2}\left(\frac{t}{s}+\frac{s}{t}\right)=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ①$$

となる。ここで $\frac{t}{s}$，$\frac{s}{t}$ は同符号であるが，①が成り立つには $\frac{t}{s}>0$，$\frac{s}{t}>0$ が必要。

左辺につき相加・相乗平均の関係を用いると

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t}{s}+\frac{s}{t}\right)\geqq\sqrt{\frac{t}{s}\cdot\frac{s}{t}}=1$$ となるので①は成立し得ない。

よって，P_3 は曲線 $xy=1$ 上にはない。

(2) $|\overrightarrow{p_1}|=|\overrightarrow{p_2}|=|\overrightarrow{p_3}|=1$ のとき，

$\overrightarrow{p_4}=\frac{3}{2}\overrightarrow{p_3}-\overrightarrow{p_2}$ が $|\overrightarrow{p_4}|=1$ を満たすことを示せばよい。

$$|\overrightarrow{p_4}|^2=\frac{9}{4}|\overrightarrow{p_3}|^2-3\overrightarrow{p_2}\cdot\overrightarrow{p_3}+|\overrightarrow{p_2}|^2=\frac{13}{4}-3\overrightarrow{p_2}\cdot\overrightarrow{p_3} \quad \cdots\cdots ②$$

であるが，ここで

$$\overrightarrow{p_1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_3}$$

の両辺を２乗することにより

$$|\overrightarrow{p_1}|^2=\frac{9}{4}|\overrightarrow{p_2}|^2-3\overrightarrow{p_2}\cdot\overrightarrow{p_3}+|\overrightarrow{p_3}|^2$$

$$1=\frac{9}{4}-3\overrightarrow{p_2}\cdot\overrightarrow{p_3}+1$$

$$-3\overrightarrow{p_2}\cdot\overrightarrow{p_3}=-\frac{9}{4} \quad \cdots\cdots ③$$

②，③より $|\overrightarrow{p_4}|=1$ を得るので，題意は示された。　∴終

(1) 文科・第2問(1)と同じ

(2) 文科・第2問(3)と同じ。$n=3$ とすると文科・第2問(2)の結果を得る.

(1) $OQ \perp \ell$ なので OQの傾きは $-\frac{1}{\alpha}$ で $Q(-\alpha, 1)$

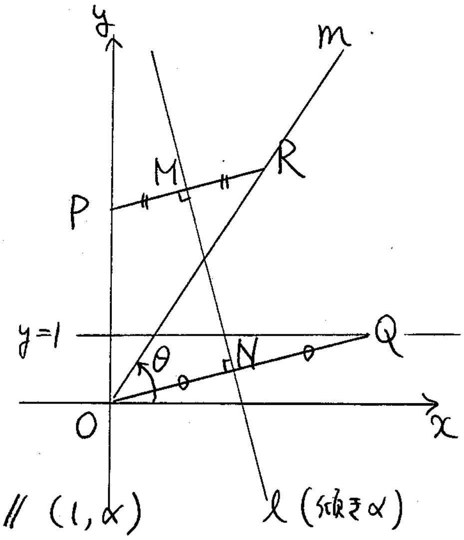
$PR /\!/ OQ$ なので 直線PRは $y = -\frac{1}{\alpha}x + p$

mとの交点を計算すると $R\left(\frac{p}{\tan\theta + \frac{1}{\alpha}}, \frac{p\tan\theta}{\tan\theta + \frac{1}{\alpha}}\right)$

PRの中点 $M\left(\frac{p}{2(\tan\theta + \frac{1}{\alpha})}, \frac{p}{2}\left(1 + \frac{\tan\theta}{\tan\theta + \frac{1}{\alpha}}\right)\right)$

OQの中点 $N\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right)$ とすると、

M, Nはともにℓ上なので $\overrightarrow{MN} /\!/ \ell /\!/ (1, \alpha)$



$$\left(\frac{p}{2(\tan\theta + \frac{1}{\alpha})} + \frac{\alpha}{2}, \frac{p}{2}\left(1 + \frac{\tan\theta}{\tan\theta + \frac{1}{\alpha}}\right) - \frac{1}{2}\right) /\!/ (1, \alpha)$$

$$\frac{p\alpha}{\tan\theta + \frac{1}{\alpha}} + \alpha^2 = p - 1 + \frac{p\tan\theta}{\tan\theta + \frac{1}{\alpha}}$$

$$p\alpha + \alpha^2\tan\theta + \alpha = (p-1)\left(\tan\theta + \frac{1}{\alpha}\right) + p\tan\theta$$

$$(2p - 1 - \alpha^2)\tan\theta = p\alpha + \alpha - \frac{p-1}{\alpha}$$

$$\tan\theta = \frac{(p+1)\alpha^2 - (p-1)}{\alpha(2p - 1 - \alpha^2)} \quad \cdots\cdots ①$$

(2) 条件から、OQの傾きについて $-\frac{1}{\alpha} = \tan\frac{\theta}{3}$ $(= t$とおく$)$

$$\tan\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} \quad (\text{三倍角の公式を作った})$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{-1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}}{1 - 3 \cdot \frac{1}{\alpha^2}} = \frac{-3\alpha^2 + 1}{\alpha^3 - 3\alpha} \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②より $\dfrac{(p+1)\alpha^2 - (p-1)}{\alpha(2p - 1 - \alpha^2)} = \dfrac{1 - 3\alpha^2}{\alpha(\alpha^2 - 3)}$ $(= \tan\theta)$

これをpについて解く。

$$(\alpha^2 - 3)\{(p+1)\alpha^2 + 1 - p\} = (1 - 3\alpha^2)(2p - 1 - \alpha^2)$$

$$\{(\alpha^2 - 3)(\alpha^2 - 1) - 2(1 - 3\alpha^2)\}p + (\alpha^2 - 3)(\alpha^2 + 1) + (1 - 3\alpha^2)(\alpha^2 + 1) = 0$$

$$(\alpha^2 + 1)^2 p - 2(\alpha^2 + 1)^2 = 0$$

$$(\alpha^2 + 1)^2(p - 2) = 0$$

αの値によらず（つまりθの値によらず）条件が成り立つような値として $p = 2$

すなわち点$P(0, 2)$が存在することが示された。　∴終

(1) $x \leqq y \leqq 3$ の範囲の正の整数の組 (x, y) に対し,

z の2次方程式　$z^2 - xyz + x^2 + y^2 = 0$　を解く.

$$
\begin{aligned}
(x, y) = (1, 1) &\longrightarrow z^2 - z + 2 = 0\\
(1, 2) &\longrightarrow z^2 - 2z + 5 = 0\\
(1, 3) &\longrightarrow z^2 - 3z + 10 = 0\\
(2, 2) &\longrightarrow z^2 - 4z + 8 = 0\\
(2, 3) &\longrightarrow z^2 - 6z + 13 = 0
\end{aligned}
\quad \Bigg\} \text{実数解なし.}
$$

$$(3, 3) \longrightarrow z^2 - 9z + 18 = 0 \longrightarrow z = 3, 6$$

したがって $(x, y, z) = (3, 3, 3), (3, 3, 6)$

(2) $a^2 + b^2 + c^2 = abc$ ……① かつ $a \leqq b \leqq c$ を満たす正の整数の組 (a, b, c) に対し,

$b^2 + c^2 + z^2 = bcz$ ……② かつ $b \leqq c \leqq z$ ……③

を満たす z を求める。

②−①：
$$
\begin{aligned}
z^2 - a^2 &= bcz - abc\\
z^2 - bcz + abc - a^2 &= 0\\
(z - a)(z + a - bc) &= 0\\
z &= a,\ bc - a
\end{aligned}
$$

これらはともに正の整数であるが, $z = bc - a$ が③を満たすかどうかを調べる。

①より $b^2 + c^2 = a(bc - a)$

$$z = bc - a = \frac{b^2 + c^2}{a} > \frac{c^2}{a} \geqq \frac{c^2}{c} = c$$

よって, ②かつ③を満たす正の整数 z の存在が示された。

(3) 組 (a, b, c) が(A)を満たすとき 組 $(b, c, bc - a)$ も(A)を満たす.

$\overrightarrow{x_1} = (3, 3, 3)$ は (A) を満たす.

$\overrightarrow{x_n} = (a, b, c)$ に対し $\overrightarrow{x_{n+1}} = (b, c, bc - a)$ と定めれば,

$\overrightarrow{x_2} = (3, 3, 6)$ 以下 $\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_4}, \cdots\cdots$ はすべて(A)を満たすので,

条件(A)を満たす組 $\overrightarrow{x_n}$ は無数に存在する.

(1) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(1+a_n)^2}$

$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 2 + a_n$

$\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくので

$b_{n+1} = b_n + 2 + a_n$ ……①

$a_1 = \dfrac{1}{2}$，$a_2 = \dfrac{2}{9}$，$b_2 = \dfrac{9}{2}$ より

$n=2$ のとき　$b_2 > 2 \times 2$ は成立する。

2以上の n について　$b_n > 2n$ の成立を仮定する。

漸化式からすべての a_n は正と判断できるので，

①と合わせて　$b_{n+1} > b_n + 2$

$> 2n+2$　（仮定）

$= 2(n+1)$

よって $n+1$ のときも不等式は成立する。

数学的帰納法によって題意は証明された。

(2) (1)の結果より　$a_n = \dfrac{1}{b_n} < \dfrac{1}{2n}$　$(n>1)$

$$0 < \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

$$< \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

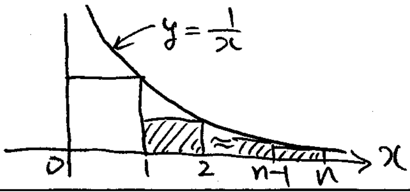
$$= \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$< \frac{1}{2n}\left\{1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx\right\} \quad \text{（下図参照）}$$

$$= \frac{1+\log n}{2n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0$$



(3) ①より

$$b_{n+1} = b_1 + \sum_{k=1}^{n}(b_{k+1} - b_k)$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n}(2 + a_k)$$

$$= 2 + 2n + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ここで

$$(n+1)a_{n+1} = \frac{n+1}{b_{n+1}}$$

$$= \frac{n+1}{2(n+1) + \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

さらに(2)から

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$$

なので

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)a_{n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n a_n = \frac{1}{2}$$

(1) $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ $(x>0)$ に対し

$$f'(x)=\frac{12}{(e^{2x}-1)^2}\left\{(3e^{3x}-3e^{x})(e^{2x}-1)-(e^{3x}-3e^{x})\cdot 2e^{2x}\right\}$$

$$=\frac{12e^{x}(e^{4x}+3)}{(e^{2x}-1)^2}>0$$

また $f(x)=\dfrac{12e^{x}(e^{2x}-3)}{(e^{x}+1)(e^{x}-1)}$ につき $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+0}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\end{cases}$

であるから、$f(x)$ は実数全体を値域とする単調増加関数となる。

すなわち、任意の実数 a に対して $f(x)=a$ となる $x>0$ がただ1つ存在する。

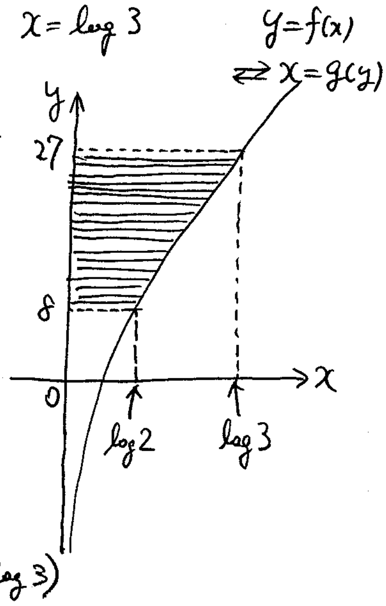
(2) $e^{x}=t$ とおき、$a=8$, $a=27$ に対応する x を求める。$(x>0$ より $t>1)$

$$\frac{12(t^3-3t)}{t^2-1}=8 \rightleftarrows (t-2)(3t^2+4t-1)=0$$

$t>1$ である解は $t=2$ のみで $x=\log 2$

$$\frac{12(t^3-3t)}{t^2-1}=27 \rightleftarrows (t-3)(4t^2+3t-3)=0$$

$t>1$ である解は $t=3$ のみで $x=\log 3$



$$\int_8^{27}g(x)\,dx=27\log 3-8\log 2-\int_{\log 2}^{\log 3}f(x)\,dx$$

$e^{x}=t$ と置換すると $dx=\dfrac{dt}{t}$ で

$$\int_{\log 2}^{\log 3}f(x)\,dx=\int_2^3\frac{12(t^3-3t)}{t^2-1}\cdot\frac{dt}{t}$$

$$=12\int_2^3\left(1-\frac{2}{t^2-1}\right)dt=12\int_2^3\left(1+\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$=12\Big[t+\log(t+1)-\log(t-1)\Big]_2^3$$

$$=12(1+\log 4-\log 3-\log 2)=12(1+\log 2-\log 3)$$

$$\therefore \int_8^{27}g(x)\,dx=27\log 3-8\log 2-12(1+\log 2-\log 3)$$

$$=\underline{39\log 3-20\log 2-12}$$