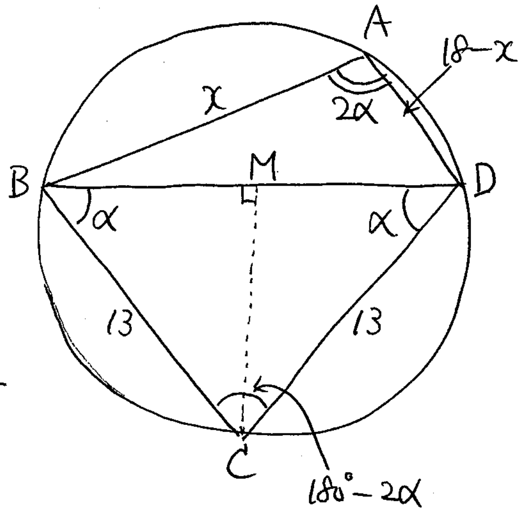
条件から $AB = x$, $DA = 18 - x$ とおける。

外接円半径 $R = \frac{65}{8}$




$BC = CD = 13$ なので

$\angle CBD = \angle CDB = \alpha$ とおけば，

$\angle BCD = 180° - 2\alpha$

円に内接する四角形の性質から，

$\angle BAD = 2\alpha$

となる。

$\triangle BCD$ について正弦定理から，

$$\sin\alpha = \frac{13}{2R} = \frac{4}{5} \quad \left(\because R = \frac{65}{8}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{-7}{25}$$

また，$BD = 2BM = 2 \cdot 13\cos\alpha = \frac{78}{5}$

$\triangle ABD$ について余弦定理を用いると，

$$x^2 + (18-x)^2 - 2x(18-x)\cos 2\alpha = \left(\frac{78}{5}\right)^2$$

$$2x^2 - 36x + 18^2 + \frac{7}{25}\cdot 2x(18-x) = \frac{78^2}{25}$$

$$25(2x^2 - 36x + 18^2) + 14x(18-x) - 78^2 = 0$$

$$36x^2 - (25\cdot 36 - 14\cdot 18)x + 5^2\cdot 18^2 - 78^2 = 0$$

$$36x^2 - 18(50-14)x + (90-78)(90+78) = 0$$

$$x^2 - 18x + 56 = 0$$

$$(x-4)(x-14) = 0$$

$$x = 4, 14$$

よって，残りの2辺の長さは 4と14 である。

(1) ×が3個出る前に○が2個出る場合とその確率は次の通り.

×｜○○ → $(1-p)p$

×｜×○○ → $(1-p)p^2$

×｜○×○ → $(1-p)^3$

したがって

$$P_2=(1-p)p+(1-p)p^2+(1-p)^3$$

$$=\underline{1-2p+3p^2-2p^3}$$

(2) ×が3個出る前に○が3個出る場合とその確率は次の通り

×｜○○○ → $(1-p)p^2$

×｜×○○○ → $(1-p)p^3$

×｜○×○○ → $(1-p)^3p$

×｜○○×○ → $(1-p)^3p$

したがって

$$P_3=(1-p)p^2+(1-p)p^3+2(1-p)^3p$$

$$=(1-p)p\{p+p^2+2(1-p)^2\}$$

$$=\underline{2p-5p^2+6p^3-3p^4}$$

(3) ×が3個出る前に○が$n$個出る場合とその確率は次の通り

×｜$\overbrace{○○\cdots\cdots○○}^{n\text{コ}}$ → 記号変化1回で　$(1-p)p^{n-1}$

×｜×○ ……… ○○○ → 記号変化1回で　$(1-p)p^n$

×｜○×○ ---- ○○○ → 記号変化3回で　$(1-p)^3p^{n-2}$

⋮　　　　⋮　　　　⋮　　$n-1$通り.

×｜○○○ ---- ○×○ → 記号変化3回で　$(1-p)^3p^{n-2}$

したがって,

$$P_n=(1-p)p^{n-1}+(1-p)p^n+(n-1)(1-p)^3p^{n-2}$$

$$=(1-p)p^{n-2}\{p+p^2+(n-1)(1-p)^2\}$$

$$=\underline{(1-p)p^{n-2}\{n-1+(3-2n)p+np^2\}}$$

(1) $x+y+z=xyz$ かつ $x \leqq y \leqq z$ となる正の整数の組 $(x, y, z)$ を求める。

$xyz = x+y+z \leqq 3z$ かつ $z>0$ より $xy \leqq 3$ が必要.

$(x, y) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$ の各々について $z = \dfrac{x+y}{xy-1}$ の値を計算すると,

なし　$z=3$　$z=2$ (不適当)

よって $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

(2) $x^3+y^3+z^3 = xyz$ を満たす正の実数の組 $(x, y, z)$ を考える。

$x \leqq y \leqq z$ と仮定しても一般性を失わない。

このとき $xyz \leqq z^3$ なので

$$x^3+y^3+z^3 \leqq z^3$$

$$x^3+y^3 \leqq 0$$

このような正数 $(x, y)$ は存在しないので, 題意は証明された。

(2) 別解.

正の実数 $x, y, z$ が $x^3+y^3+z^3 = xyz$ を満たすとき,

相加・相乗平均の関係から

$$xyz = x^3+y^3+z^3 \geqq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3} = 3xyz$$

$xyz>0$ なので両辺を割ると $1 \geqq 3$ となり矛盾が生じる

よって, このような正数の組 $(x, y, z)$ は存在しない.　　∴終

$0^\circ<\theta<45^\circ$ では $0<\cos 2\theta<1$ , $-1\leqq x\leqq 1$ では $x+1\geqq 0$, $x-1\leqq 0$ なので

$$f(x)=(x+1)^3+(1-x)^3+|x-\cos 2\theta|^3$$

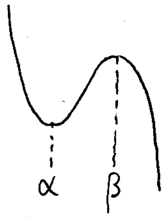
$$=\begin{cases} 6x^2+2+(x-\cos 2\theta)^3 & (0<\cos 2\theta\leqq x\leqq 1 \text{ のとき}) \text{——(ア)} \\ 6x^2+2-(x-\cos 2\theta)^3 & (-1\leqq x\leqq \cos 2\theta \text{ のとき}) \text{——(イ)} \end{cases}$$

(ア)の場合

$f'(x)=12x+3(x-\cos 2\theta)^2>0$ なので区間内で $f(x)$ は単調増加する。

(イ)の場合

$$f'(x)=12x-3(x-\cos 2\theta)^2$$
$$=-3\{x^2-(4+2\cos 2\theta)x+\cos^2 2\theta\}$$
$$=-3\{(x-2-\cos 2\theta)^2-8\cos^2\theta\}$$
$$=-3(x-\alpha)(x-\beta)$$




(ただし $\alpha=2+\cos 2\theta-2\sqrt{2}\cos\theta$
　　　 $\beta=2+\cos 2\theta+2\sqrt{2}\cos\theta$ )

ここで $\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta<1$ より $2-2\sqrt{2}\cos\theta<0$　　$\therefore\ \alpha<\cos 2\theta<\beta$

また　$\alpha-(-1)=3+(2\cos^2\theta-1)-2\sqrt{2}\cos\theta$
$$=2(\cos^2\theta-\sqrt{2}\cos\theta)+2$$
$$=2\left(\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1>0$$ より $-1<\alpha$

したがって　$-1<\alpha<\cos 2\theta<\beta$.

(ア)(イ)から、$f(x)$ の増減は次のようになる。

$-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で
$f(x)$ を最小にする $x$ は

$$x=\alpha=2+\cos 2\theta-2\sqrt{2}\cos\theta$$
$$=\underline{2\cos^2\theta-2\sqrt{2}\cos\theta+1}$$