(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ に対し，

$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ であるから，$a_1=1,\ b_1=-1$ とすれば $n=1$ について題意は成り立つ．

ある n で $f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表されることを仮定すると，

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{\frac{b_n}{x}\cdot x^{n+1}-(a_n+b_n\log x)\cdot(n+1)x^n}{x^{2n+2}}=\frac{b_n-(n+1)a_n-(n+1)b_n\log x}{x^{n+2}}$$

となるから，
$$\begin{cases} a_{n+1}=-(n+1)a_n+b_n & \cdots\text{①}\\ b_{n+1}=-(n+1)b_n & \cdots\text{②}\end{cases}$$

とおくことで $f^{(n+1)}(x)=\dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}\log x}{x^{n+2}}$ となり，$n+1$ のときも題意の形に表される．

数学的帰納法により，$n=1,2,\cdots$ に対し題意は成り立ち，漸化式は ①，② で与えられる．

(2) $\{b_n\}$ について，漸化式②をくり返し用いると，

$b_1=-1$

$b_2=-2b_1=2$

$b_3=-3b_2=-6$

$b_4=-4b_3=24$

となり，$b_n=(-1)^n n!$ と予想される．

$n=1$ のとき成立する．また n での成立を仮定して漸化式②を用いると

$$b_{n+1}=-(n+1)b_n=-(n+1)(-1)^n n!=(-1)^{n+1}(n+1)!$$

となって $n+1$ でも成立するから，帰納的に予想が正しいことが示される．

①に代入すると，

$$a_{n+1}=-(n+1)a_n+(-1)^n n!\ ,\quad a_1=1$$

両辺を $(n+1)!$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=-\frac{a_n}{n!}+\frac{(-1)^n}{n+1}\ ,\quad \frac{a_1}{1!}=1$$

さらに両辺を $(-1)^{n+1}$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!}=\frac{a_n}{(-1)^n n!}+\frac{-1}{n+1}\ ,\quad \frac{a_1}{(-1)^1 1!}=-1$$

ここで $\dfrac{a_n}{(-1)^n n!}=c_n$ とおくと $c_1=-1$ で

$$c_{n+1}=c_n+\frac{-1}{n+1}$$

$$c_n=c_1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}$$
$$=-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=-h_n$$

したがって

$$a_n=(-1)^n n!\,c_n=(-1)^{n+1}n!\,h_n$$

$T=\{w \mid w=z^2-2z$ ならば $|z|\leqq \frac{5}{4}\}$

$=\{w \mid (w=z^2-2z$ かつ $|z|>\frac{5}{4})$ ではない$\}$

であるから

$\overline{T}=\{w \mid w=z^2-2z$ かつ $|z|>\frac{5}{4}\}$ について考える

このとき $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>\frac{5}{4})$ と表せるので

$w=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)-2r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=(r^2\cos2\theta-2r\cos\theta)+i(r^2\sin2\theta-2r\sin\theta)$

$=r(r\cos2\theta-2\cos\theta)+i\,2r\sin\theta\,(r\cos\theta-1)$

ここで T と $\overline{T}$ の境界である $r=\frac{5}{4}$ のときについて考えると

$w=\frac{5}{4}\left\{\left(\frac{5}{4}\cos2\theta-2\cos\theta\right)+i\cdot\frac{5}{2}\sin\theta\left(\frac{5}{4}\cos\theta-1\right)\right\}$

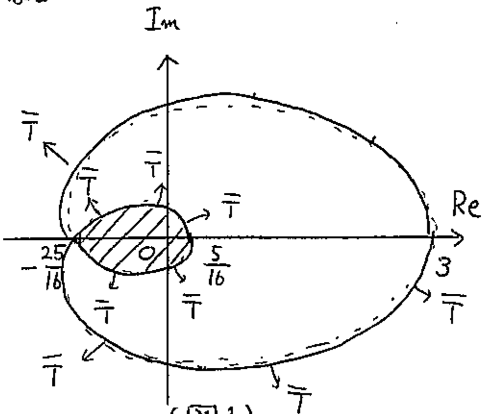
となる 虚部に注目すると $\mathrm{Im}(w)=0$ のとき

$\theta=0,\ \alpha,\ \pi,\ 2\pi-\alpha$ (ただし α は $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ をみたす鋭角)

となることから θ が 0 から 2π まで増加する間 w は実軸と4回交わる

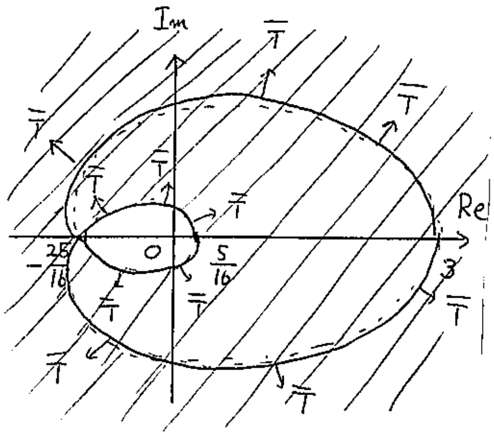
θ の値と $\mathrm{Re}(w)$, $\mathrm{Im}(w)$ の様子を調べると以下の様になる

θ	0		α		π		$2\pi-\alpha$		2π
$\mathrm{Re}(w)$	$\frac{5}{16}$		$-\frac{25}{16}$		3		$-\frac{25}{16}$		$\frac{5}{16}$
$\mathrm{Im}(w)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0



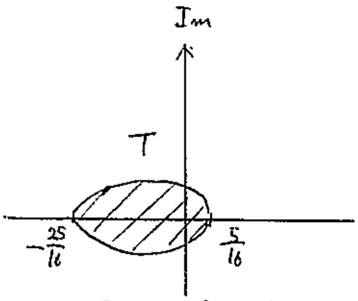
(図1)

従って $r=\frac{5}{4}$ のとき w の描く概形は右図のようになる. さらに $r>\frac{5}{4}$ となる $\overline{T}$ が表す領域は, 各曲線上の点において原点 O と反対側であるので図の斜線部のように表せる.



(図2)

よって領域 T は図3のようになる



(図3)

つまり T の境界は $r=\frac{5}{4}$, $0\leqq\theta\leqq\alpha$, $2\pi-\alpha\leqq\theta\leqq2\pi$ のときにあたる. ここで

$|w|^2=r^2(r\cos2\theta-2\cos\theta)^2+r^2(r\sin2\theta-2\sin\theta)^2$

$=r^2\{r^2-4r(\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta)+4\}$

$=r^2(r^2-4r\cos\theta+4)$ より $r=\frac{5}{4}$ のとき

$|w|^2=\frac{25}{16}\left(\frac{89}{16}-5\cos\theta\right)$ よって $\theta=\alpha,\ 2\pi-\alpha$ のとき最大.

すなわち $w=-\frac{25}{16}$ となる.

(1) $f(x)=\frac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$ のとき

$$f'(x)=\frac{1}{2}\{1+e^{-2(x-1)}+x\cdot(-2)e^{-2(x-1)}\}$$
$$=\frac{1}{2}\{1+(1-2x)e^{-2(x-1)}\}$$
$$f''(x)=\frac{1}{2}\{-2e^{-2(x-1)}+(1-2x)(-2)e^{-2(x-1)}\}$$
$$=2(x-1)e^{-2(x-1)}$$

$x>\frac{1}{2}$ における $f'(x)$ の増減は表のようになり、

$x>\frac{1}{2}$ ならば $0\leqq f'(x)<\frac{1}{2}$ となる。

x	$(\frac{1}{2})$	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$(\frac{1}{2})$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$(\frac{1}{2})$

(2) 1 と x_n の間で実数 c が存在し、

$$\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}=f'(c)$$

となる。(平均値の定理)

$x_{n+1}=f(x_n)$ および $f(1)=1$ より、

$$\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}=f'(c)$$

ここで $\frac{1}{2}<x_n$ ならば、1 と x_n の間の区間において (1) が適用できて

$$0\leqq f'(c)<\frac{1}{2}$$

となるから

$$0\leqq\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}<\frac{1}{2}.$$

分母，分子は同符号だから、

$$|x_{n+1}-1|<\frac{1}{2}|x_n-1| \quad \cdots\cdots ①$$

と合わせて $\frac{1}{2}<x_n$ ならば $\frac{1}{2}<x_{n+1}$ となる。

$x_0>\frac{1}{2}$ より帰納的にすべての x_n について $x_n>\frac{1}{2}$.

① をくり返し用いれば

$$0\leqq|x_n-1|<\left(\frac{1}{2}\right)^n|x_0-1| \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-1|=0$$
$$\lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

$a=2b+1$ $(1 \leqq b \leqq 4999)$ とおくと $a^2-a=a(a-1)=2b(2b+1)$ で，
これが $10000=2^4\times5^4$ で割り切れるのだから、素因数2に注意すれば b が $2^3=8$ で割り切れる。
$b=8c$ $(1 \leqq c \leqq 624)$ とおくと．$a^2-a=16c(16c+1)$ で，
$c(16c+1)$ が 5^4 で割り切れなければならない。
ここで c，$16c+1$ の両方が5で割り切れることはない．$(\because (16c+1)-c=5\times3c+1)$
c，$16c+1$ の一方のみが $5^4=625$ で割り切れることになるが，$0<c<5^4$ なので，
$16c+1$ が 5^4 で割り切れる。
$16c+1=5\times3c+(c+1)$ なので cは5で割って4余ることが必要．
$c=5d-1$ $(1 \leqq d \leqq 125)$ とおくと
$16c+1=16(5d-1)+1=80d-15=5(16d-3)$ が 5^4 でわりきれるので，
$16d-3=5\times3d+(d-3)$ が 5^3 で割り切れる。dは5で割って3余ることが必要．
$d=5e-2$ $(1 \leqq e \leqq 25)$ とおくと，
$16d-3=16(5e-2)-3=80e-35=5(16e-7)$ が 5^3 で割り切れるので
$16e-7=5(3e-1)+(e-2)$ が 5^2 で割り切れる。eは5で割って2余ることが必要．
$e=5f-3$ $(1 \leqq f \leqq 5)$ とおくと
$16e-7=16(5f-3)-7=80f-55=5(16f-11)$ が 5^2 で割り切れるので，
$16f-11=5(3f-2)+(f-1)$ が5で割り切れる。
それは $f=1$ のみである。このとき

$$
\begin{aligned}
e&=5f-3=2\\
d&=5e-2=8\\
c&=5d-1=39\\
b&=8c=312\\
a&=2b+1=\underline{625}
\end{aligned}
$$

となるが，このとき

$$a^2-a=a(a-1)=625\times624=5^4\times2^4\times39=390000$$

となり，題意をみたす。

［別解］ $a^2-a=10000k$ （kは自然数）すなわち $a(a-1)=2^4\times5^4\times k$ とおける。
aは奇数で aと$a-1$は互いに素だから，素因数2はすべて$a-1$に，素因数5はすべてaに含まれる．
すなわち、$a=5^4l$ $(3 \leqq a \leqq 9999$ より $1 \leqq l \leqq 15)$ とおける。
このとき，$a-1=625l-1=2^4\times39l+(l-1)$ が 2^4の倍数となるから，$l=1$ のみが適する。
よって $a=5^4\times1=\underline{625}$

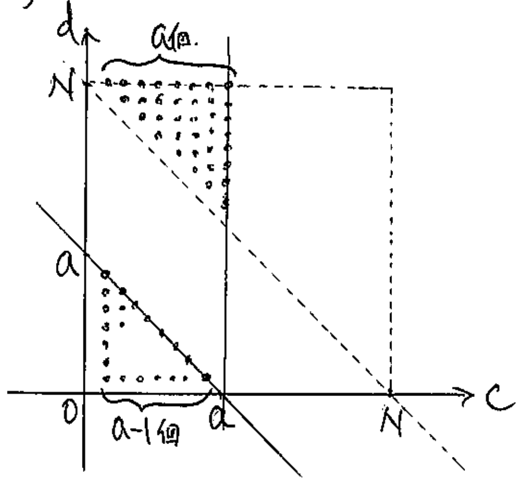
(1) 甲が2回目にカードをひかない場合，甲が勝つのは

$c \leqq a$ かつ $(\ c+d \leqq a$ または $N < c+d\ )$ のときである。

このような (c, d) は右図の格子点となり，
その個数は

$$\frac{1}{2}(a-1)a + \frac{1}{2}a(a+1) = a^2$$

甲が勝つ確率は $\frac{a^2}{N^2}$



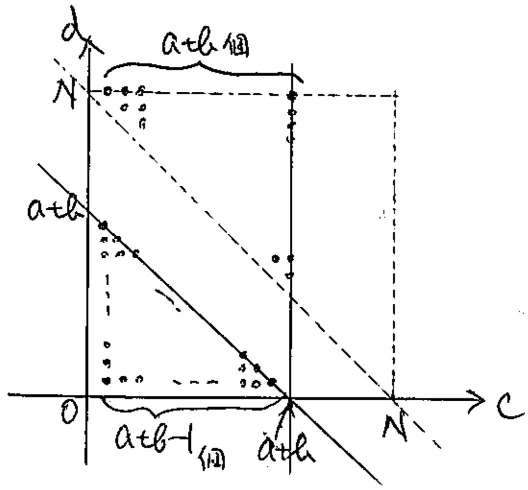
(2) 甲が2回目にカードをひく場合，甲が勝つのは

$a+b \leqq N$ かつ $a+b \geqq c$ かつ

$(\ c+d \leqq a+b$ または $N < c+d\ )$

のときである。

$b = 1, 2, \cdots, N-a$ の各々に対し，
格子点 (c, d) を数えることにする。
図は(1)の a が $a+b$ に替わったものだから，
固定した b に対して (c, d) は $(a+b)^2$ 個．
これらを $1 \leqq b \leqq N-a$ で加えて，



$$\sum_{b=1}^{N-a}(a+b)^2 = \sum_{k=a+1}^{N} k^2$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k^2 - \sum_{k=1}^{a} k^2$$

$$= \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) - \frac{1}{6}a(a+1)(2a+1)$$

甲が勝つ確率は

$$\frac{1}{N^3}\sum_{b=1}^{N-a}(a+b)^2 = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(2+\frac{1}{N}\right) - \frac{1}{6}\cdot\frac{a(a+1)(2a+1)}{N^3}$$

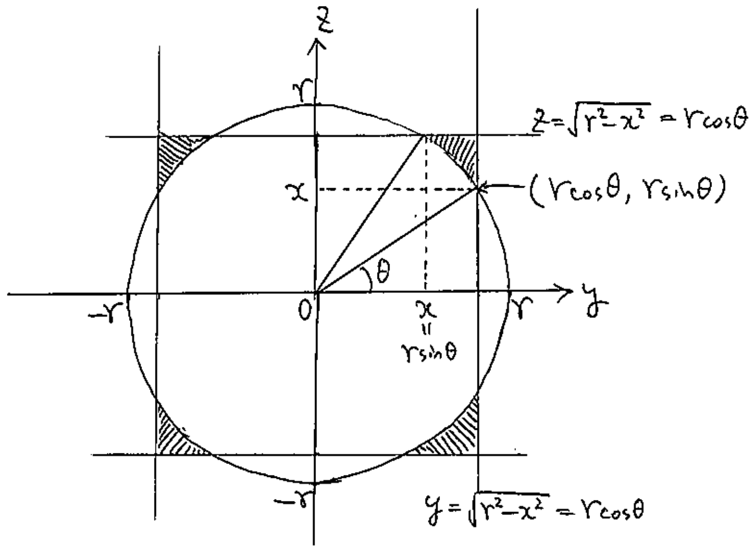
$x=$ 一定 $(-r \leqq x \leqq r)$ の平面による立体の切り口は

$$y^2 \leqq r^2 - x^2,\quad y^2+z^2 \geqq r^2,\quad z^2 \leqq r^2 - x^2$$

さらに $x = r\sin\theta$ とおけば

$$y^2 \leqq r^2\cos^2\theta,\quad y^2+z^2 \geqq r^2,\quad z^2 \leqq r^2\cos^2\theta$$

であるから、断面は下図の斜線部のような図形となる。



断面の存在する範囲は

$$-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4} \quad \text{すなわち} \quad -\frac{r}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \text{である。}$$

断面積を $S(x)$ とすると、

$$S(x) = 4\left\{(r\cos\theta)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}r\cos\theta\cdot r\sin\theta - \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}$$

$$= 4r^2\left\{\cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta - \left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}$$

題意の立体は yz 平面に関して対称であるから、その体積 V は

$$V = 2\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} S(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} S(x)\cdot\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta \qquad (x = r\sin\theta)$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4r^2\left\{\cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta - \left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\} r\cos\theta\,d\theta$$

$$= 8r^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{(1-\sin^2\theta)(\sin\theta)' + \cos^2\theta(\cos\theta)' - \frac{\pi}{4}\cos\theta + \theta\cos\theta\right\}d\theta$$

$$= 8r^3\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} + \frac{\cos^3\theta}{3} - \frac{\pi}{4}\sin\theta + \theta\sin\theta + \cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 8r^3\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}} + \frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{2\sqrt{2}}}-1\right) - \cancel{\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} + \cancel{\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\right\}$$

$$= 8r^3\left(\sqrt{2}-\frac{4}{3}\right) = \underline{\left(8\sqrt{2}-\frac{32}{3}\right)r^3}$$