

第 1 問

$f(x)$ を $f(0)=0$ をみたす 2 次関数とする。 a, b を実数として、関数 $g(x)$ を次で与える。

$$g(x) = \begin{cases} ax & (x \leq 0) \\ bx & (x > 0) \end{cases}$$

a, b をいろいろ変化させ

$$\int_{-1}^0 \{f'(x) - g'(x)\}^2 dx + \int_0^1 \{f'(x) - g'(x)\}^2 dx$$

が最小になるようにする。このとき、

$$g(-1) = f(-1), \quad g(1) = f(1)$$

であることを示せ。

第 2 問

3 以上 9999 以下の奇数 a で, $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

第 3 問

0 以上の実数 s, t が $s^2 + t^2 = 1$ をみたしながら動くとき, 方程式

$$x^4 - 2(s+t)x^2 + (s-t)^2 = 0$$

の解のとり値の範囲を求めよ。

第 4 問

N を 1 以上の整数とする。数字 $1, 2, \dots, N$ が書かれたカードを 1 枚ずつ、計 N 枚用意し、甲、乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

(i) 甲が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を a とする。ひいたカードはもとに戻す。

(ii) 甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する。ひいた場合は、そのカードに書かれた数を b とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は、 $b = 0$ とする。

$a + b > N$ の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。

(iii) $a + b \leq N$ の場合は、乙が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を c とする。ひいたカードはもとに戻す。 $a + b < c$ の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。

(iv) $a + b \geq c$ の場合は、乙はもう 1 回カードをひく。そのカードに書かれた数を d とする。 $a + b < c + d \leq N$ の場合は乙の勝ちとし、それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii) の段階で、甲にとってどちらの選択が有利であるかを、 a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1) 甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき、甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき、甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし、各カードがひかれる確率は等しいものとする。