$g(x)=\begin{cases} ax & (x\leqq 0) \\ bx & (0<x) \end{cases}$ のとき $\begin{cases} g(-1)=-a \\ g(1)=b \end{cases}$ であり $g'(x)=\begin{cases} a & (-1\leqq x\leqq 0) \\ b & (0<x\leqq 1) \end{cases}$

また、$f(0)=0$ をみたす２次関数は

$f(x)=px^2+qx$ とおくことができて、$\begin{cases} f(-1)=p-q \\ f(1)=p+q \end{cases}$ である。

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx \\
&= \int_{-1}^{0}\{f'(x)-a\}^2dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-b\}^2dx \\
&= a^2-2a\int_{-1}^{0}f'(x)dx+\int_{-1}^{0}f'(x)^2dx+b^2-2b\int_{0}^{1}f'(x)dx+\int_{0}^{1}f'(x)^2dx \\
&= a^2-2a\{f(0)-f(-1)\}+b^2-2b\{f(1)-f(0)\}+\int_{-1}^{1}(2px+q)^2dx. \\
&= a^2+2(p-q)a+b^2-2(p+q)b+\int_{-1}^{1}(2px+q)^2dx \\
&= \{a+(p-q)\}^2+\{b-(p+q)\}^2-2(p^2+q^2)+\int_{-1}^{1}(2px+q)^2dx.
\end{aligned}
$$

a, b をいろいろ変化させ I を最小にするとき、

$a=-(p-q)$, $b=p+q$

である。このとき

$\begin{cases} g(-1)=-a=p-q=f(-1) \\ g(1)=b=p+q=f(1) \end{cases}$

となるので、題意は示された。

$a=2b+1$ $(1\leqq b\leqq 4999)$ とおくと $a^2-a=a(a-1)=2b(2b+1)$ で，
これが $10000=2^4\times 5^4$ で割り切れるのだから、素因数２に注意すれば b が $2^3=8$ で割り切れる。
$b=8c$ $(1\leqq c\leqq 624)$ とおくと，$a^2-a=16c(16c+1)$ で，
$c(16c+1)$ が 5^4 で割り切れなければならない。
ここで c，$16c+1$ の両方が５で割り切れることはない。$(\because (16c+1)-c=5\times 3c+1)$
c，$16c+1$ の一方のみが $5^4=625$ で割り切れることになるが，$0<c<5^4$ なので，
$16c+1$ が 5^4 で割り切れる。
$16c+1=5\times 3c+(c+1)$ なので c は５で割って４余ることが必要。
$c=5d-1$ $(1\leqq d\leqq 125)$ とおくと
$16c+1=16(5d-1)+1=80d-15=5(16d-3)$ が 5^4 でわりきれるので，
$16d-3=5\times 3d+(d-3)$ が 5^3 で割り切れる。d は５で割って３余ることが必要。
$d=5e-2$ $(1\leqq e\leqq 25)$ とおくと，
$16d-3=16(5e-2)-3=80e-35=5(16e-7)$ が 5^3 で割り切れるので
$16e-7=5(3e-1)+(e-2)$ が 5^2 で割り切れる。e は５で割って２余ることが必要。
$e=5f-3$ $(1\leqq f\leqq 5)$ とおくと
$16e-7=16(5f-3)-7=80f-55=5(16f-11)$ が 5^2 で割り切れるので，
$16f-11=5(3f-2)+(f-1)$ が５で割り切れる。
それは $f=1$ のみである。このとき

$$e=5f-3=2$$
$$d=5e-2=8$$
$$c=5d-1=39$$
$$b=8c=312$$
$$a=2b+1=\underline{625}$$

となるが，このとき

$$a^2-a=a(a-1)=625\times 624=5^4\times 2^4\times 39=390000$$

となり，題意をみたす。

［別解］$a^2-a=10000k$ （kは自然数）すなわち $a(a-1)=2^4\times 5^4\times k$ とおける。
aは奇数で aと$a-1$は互いに素だから，素因数２はすべて$a-1$に，素因数５はすべてaに含まれる。
すなわち，$a=5^4 l$ $(3\leqq a\leqq 9999$ より $1\leqq l\leqq 15)$ とおける。
このとき，$a-1=625l-1=2^4\times 39l+(l-1)$ が 2^4 の倍数となるから，$l=1$ のみが適する。
よって $a=5^4\times 1=\underline{625}$

$$x^4 - 2(s+t)x^2 + (s-t)^2 = 0$$

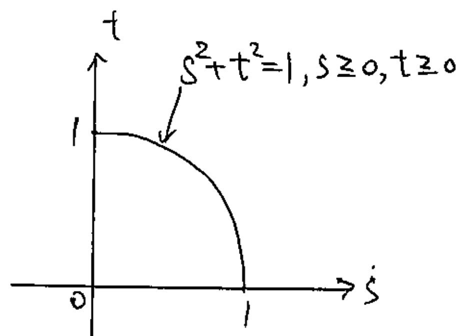
のとき

$$x^2 = (s+t) \pm \sqrt{(s+t)^2 - (s-t)^2}$$
$$= s+t \pm 2\sqrt{st}$$

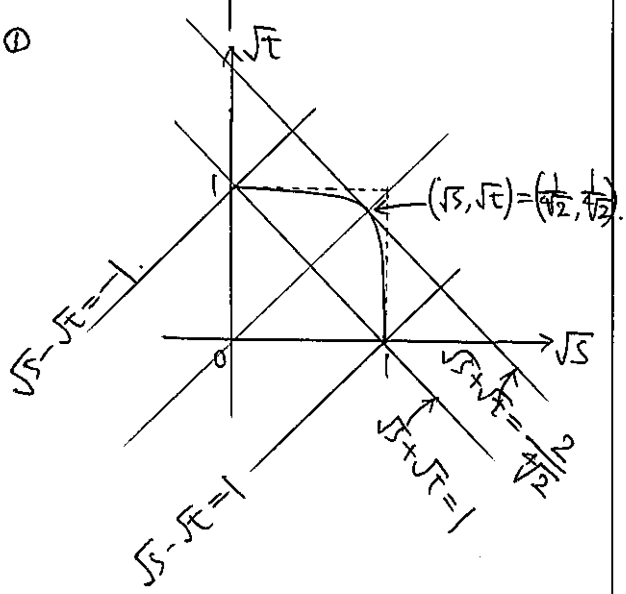
s, t とも 0以上なので

$$x^2 = (\sqrt{s}+\sqrt{t})^2,\ (\sqrt{s}-\sqrt{t})^2$$

$$x = \pm(\sqrt{s}+\sqrt{t}),\ \pm(\sqrt{s}-\sqrt{t}) \quad \cdots\cdots ①$$



ここで，点 (s, t) は四分円を描くが，
点 $(\sqrt{s}, \sqrt{t})$ は右図のようになる．
$\left[\because (\sqrt{s})^4 + (\sqrt{t})^4 = 1\right]$



図から．

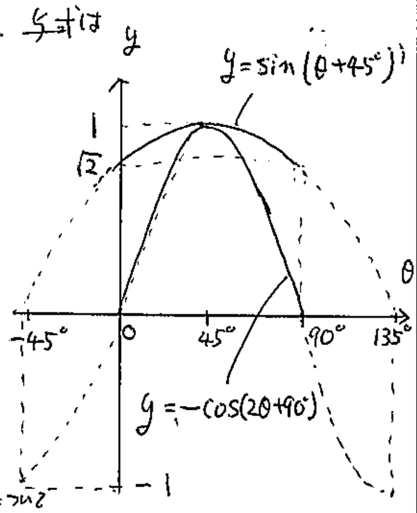
$$\begin{cases} 1 \leqq \sqrt{s}+\sqrt{t} \leqq \dfrac{2}{\sqrt[4]{2}} = 2^{\frac{3}{4}} \\ -1 \leqq \sqrt{s}-\sqrt{t} \leqq 1. \end{cases}$$

となるので，① の 4つの解のとる値の範囲は

$$-2^{\frac{3}{4}} \leqq x \leqq 2^{\frac{3}{4}}$$

［別解］ $0 \leqq s, t,\quad s^2+t^2=1$ より
$s=\cos\theta,\ t=\sin\theta \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ とおくことができる．与式は

$$x^4 - 2(\cos\theta+\sin\theta)x^2 + (\cos\theta-\sin\theta)^2 = 0$$
$$x^4 + 2\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)x^2 + 2\cos^2(\theta+45^\circ) = 0$$
$$x^2 = \sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ) \pm \sqrt{2\sin^2(\theta+45^\circ) - 2\cos^2(\theta+45^\circ)}$$
$$= \sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ) \pm \sqrt{2}\sqrt{-\cos(2\theta+90^\circ)}$$



ここで $0 \leqq \theta \leqq 90^\circ$ での $y=\sin(\theta+45^\circ)$，$y=-\cos(2\theta+90^\circ)$
のグラフを考えると 共に $\theta=0^\circ, 90^\circ$ で最小値をとり，$\theta=45^\circ$ で
最大値をとる．また $0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ で単調増加，$45^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ で
単調減少となる．よって $x^2=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)+\sqrt{2}\sqrt{-\cos(2\theta+90^\circ)}$ について

$$\underset{\theta=0^\circ, 90^\circ}{1} \leqq x^2 \leqq \underset{\theta=45^\circ}{2\sqrt{2}}$$

$x^2=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)-\sqrt{2}\sqrt{-\cos(2\theta+90^\circ)}$ について

$$\underset{\theta=45^\circ}{0} \leqq x^2 \leqq \underset{\theta=0^\circ, 90^\circ}{1}$$

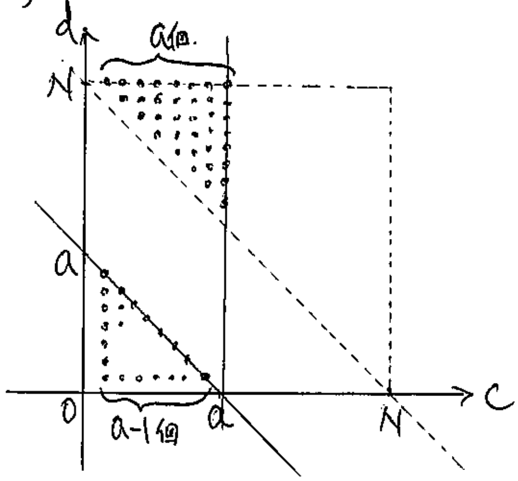
以上より $0 \leqq x^2 \leqq 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore -2^{\frac{3}{4}} \leqq x \leqq 2^{\frac{3}{4}}$$

(1) 甲が2回目にカードをひかない場合，甲が勝つのは

$c \leqq a$ かつ $(c+d \leqq a$ または $N < c+d)$ のときである。

このような (c, d) は右図の格子点となり，



その個数は

$$\frac{1}{2}(a-1)a + \frac{1}{2}a(a+1) = a^2$$

甲が勝つ確率は $\dfrac{a^2}{N^2}$

(2) 甲が2回目にカードをひく場合，甲が勝つのは

$a+b \leqq N$ かつ $a+b \geqq c$ かつ

$(c+d \leqq a+b$ または $N < c+d)$

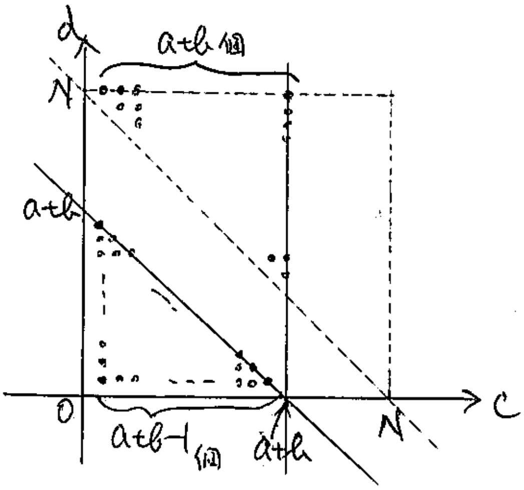
のときである。

$b = 1, 2, \cdots, N-a$ の各々に対し，

格子点 (c, d) を数えることにする。

図は (1) の a が $a+b$ に替わったものだから，

固定した b に対して (c, d) は $(a+b)^2$ 個。



これらを $1 \leqq b \leqq N-a$ で加えて，

$$\sum_{b=1}^{N-a}(a+b)^2 = \sum_{k=a+1}^{N} k^2$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k^2 - \sum_{k=1}^{a} k^2$$

$$= \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) - \frac{1}{6}a(a+1)(2a+1)$$

甲が勝つ確率は

$$\frac{1}{N^3}\sum_{b=1}^{N-a}(a+b)^2 = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(2+\frac{1}{N}\right) - \frac{1}{6}\cdot\frac{a(a+1)(2a+1)}{N^3}$$